حالت جامد پیشرفته (I)

جلسه اول: [illegible]

[illegible] بعد از کشفیات تامسون در سال ۱۸۹۷ م درود مدل اتمی در سال ۱۹۰۰ درود مدل خود را برای فلزات ارائه کرد. آنچه در این نظریه مدل ارائه شده است کاملاً کلاسیکی است. این مدل براساس مدل تامسون و با استفاده از تئوری انرژی جنبشی گازها (بولتزمن) ارائه شده است.

[illegible] در این تئوری اتم‌ها یا گازها به صورت کره‌های کوچک یکسان در نظر گرفته شده‌اند که در هر جهتی حرکت می‌کنند تا به کره دیگری برخورد کنند. مدت زمان برخورد بسیار کوتاه در نظر گرفته شده است و نیروهایی که در حین برخورد ایجاد می‌شوند آن در نظر گرفته شده‌اند و از هرگونه برهمکنش دیگر بین ذرات چشم‌پوشی شده است. در گازهای ساده چون یک نوع ذره وجود دارد، درود الکترون‌ها را دارای بار منفی دارای حرکت در نظر گرفت و بارهای مثبت را ذرات بسیار سنگین و ثابت در نظر گرفت.

در مدل درود اتم‌ها با کنار هم قرار گرفتن فلز را تشکیل می‌دهند. الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها جدا می‌شوند و می‌توانند در سراسر فلز به طور آزادانه حرکت کنند و یون‌های فلزی بدون حرکت باقی می‌مانند. جذاب بودن تمام خواص فلزات را به الکترون‌های رسانش نسبت می‌دهد. اگر یک اتم فلزی دارای هسته‌ای با بار eZ_a باشد [Z_a عدد اتمی و e واحد بار الکتریکی است] هسته‌ها با Z_a الکترون با بار $-eZ_a$ احاطه شده‌اند. تعدادی از آنها Z الکترون رابطه نسبتاً ضعیفی دارند که الکترون‌های لایه ظرفیت هستند. اتم‌ها $Z_a - Z$ الکترون دیگر، الکترون‌های مقید هستند و نقش مهمی در خواص فلزات در مدل درود بازی نمی‌کنند. این الکترون‌ها ($Z_a - Z$) به عنوان الکترون‌های کُر شناخته شده‌اند. الکترون‌های کُر مقید هستند و یون‌های فلزی را تشکیل می‌دهند.

مدل ساده فلز به طور شماتیک در شکل زیر نمایش داده شده است.

۱ـ الکترون‌های رسانش یک گاز الکترونی آزاد [یعنی الکترون‌ها، یون‌ها را نمی‌بینند و از برهمکنش الکترون-یون صرف‌نظر شده است] و مستقل [یعنی الکترون‌ها، الکترون‌های دیگر را هم نمی‌بینند و از برهمکنش الکترون-الکترون صرف‌نظر شده است] را تشکیل می‌دهند و یون‌ها [اتم کور] در خواص شرکت نمی‌کنند.

بطور خلاصه: فلز = گاز الکترونی آزاد و مستقل + یون مثبت زمینه.

اولاً ما فلز را خنثی می‌گیریم، ثانیاً الکترون‌های رسانش متحرک است

در هنگام برخورد، چون تأثیرات الکترون‌های دیگر و یون‌های زمینه را روی الکترون بطور کلی در نظر نمی‌گیریم پس در غیاب میدان الکتریکی [الکترومغناطیسی] خارجی هر الکترون بطور یکنواخت در یک خط راست در هر جهت دلخواهی حرکت می‌کند که بطور متوسط سرعت آنها صفر است.

ولی در حضور میدان‌های خارجی، هر الکترون براساس قوانین حرکت نیوتن تحت میدان خارجی در جهت آن میدان حرکت می‌کند در حالیکه از میدان‌های پیچیده اضافی که توسط دیگر الکترون‌ها و یون‌ها ایجاد شده است صرف‌نظر شده است.

۲ـ اگر N اتم داشته باشیم و اگر هر اتم Z الکترون رسانش داشته باشد تعداد الکترون‌های رسانش در واحد حجم عبارتست از:

$$n = \frac{NZ}{V}$$ چگالی الکترون‌های رسانش

حجم

اگر کره‌ای به شعاع r_s رسم کنیم حجم مربوط به یک الکترون بطور متوسط $\left(\frac{4}{3}\pi r_s^3\right)$ می‌باشد.

حجمی که بطور متوسط یک الکترون رسانش اشغال می‌کند:

$$\frac{1}{n} = \frac{4}{3}\pi r_s^3$$

معمولاً بجای اینکه صحبت از n به میان آید از r_s صحبت می‌کنند.

$$r_s = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3}$$

در بعضی مواقع نسبت r_s به شعاع اتم بور در نظر گرفته می‌شود که $a_0 = 0.529\,Å$.

نسبت $\frac{r_s}{a_0}$ در اکثر فلزات بین 2 و 3 است در حالیکه در فلزات قلیایی این نسبت بین 3 و 6 است

$\frac{r_s}{a_0} \rightarrow (2-6)$

2 - در مدل درود، برخورد بطور آنی اتفاق می‌افتد و بطور ناگهانی سرعت یک الکترون را تغییر می‌دهد. الکترونها بطور غیرقابل نفوذ در اتم‌ها به آنها برخورد می‌کنند. (تقریباً برخوردهای الکترون - الکترون نسبت به برخوردها در کارهای معمولی بیشتر است)

3 - الکترون با احتمال $\frac{1}{\tau}$ در یک ثانیه برخورد پیدا می‌کند یعنی در مدت زمان dt احتمال برخورد $\frac{dt}{\tau}$ می‌باشد. τ زمان برخورد یا زمان واهلش یا زمان پویش آزاد نامیده شده است. براین فرض این برداشت می‌شود که الکترون بطور تصادفی اندازه حرکت می‌گیرد و بطور متوسط در مدت زمان τ قبل از برخورد بعدی حرکت می‌کند و τ مستقل از محل و سرعت الکترون است و برای الکترونهای مختلف یک فلز یکسان است

4 - وقتی الکترونی با هسته [اتم یون] برخورد می‌کند نحوه برخورد به اطلاعات قبل از برخورد بستگی ندارد ب) الکترون پس از برخورد به دمای تعادل موضعی آن نقطه می‌رسد.

ج) الکترونی که در مکانی گرمتر ظاهر برخورد می‌کند نسبت به الکترونهای دیگر پس از برخورد دارای انرژی جنبشی بیشتری است

n, τ جزو عوامل یک فلز بحساب می‌آیند

گاهی اوقات از نسبت $\frac{r_s}{a_0}$ برای محاسبه چگالی الکترونهای رسانش استفاده می‌شود

برای مثال :

$r = \frac{3}{4\pi a_0^3} \times \left(\frac{r_s}{a_0}\right)$

اگر $\frac{r_s}{a_0} = 2$ باشد

$\frac{r_s}{a_0} = 2 \rightarrow r_s = 2a_0 = 2 \times 0.52\, A^\circ$

$r_s = 1.04\ A^\circ \quad ; \quad n = \frac{3}{4\pi r_s^3} = \frac{3}{4\pi \times (1.04 \times 10^{-10})^3}$

$n = \frac{3}{4\pi} \times 10^{30} = 2.5 \times 10^{29}\ (m^{-3})$

برطبق قانون اهم ، جریان الکتریکی (I) در سیم با اختلاف پتانسیل در طول سیم (V) متناسب است که نسبت تناسب آن مقاومت الکتریکی نامیده می‌شود .

مقاومت سیم به ابعاد و جنس سیم بستگی دارد اما از مقدار جریان الکتریکی و اختلاف پتانسیل مستقل است مدل درود این رفتار را توضیح می‌دهد و تخمینی از اندازهٔ مقاومت فراهم می‌کند . تعریف کمیت مقاومت ویژه (ρ) راه عمومی برای صرفنظر کردن از وابستگی R به شکل سیم است .

مقاومت ویژه ρ به عنوان ثابت تناسب بین میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}$ در یک نقطه از فلز و چگالی جریان الکتریکی ($\vec{j}$) می‌باشد :

$$\vec{E} = \rho \vec{j}$$

طبق اصول ترمودینامیکی الکترون در غیاب میدان خارجی دارای سرعت متوسط صفر است ولی در حضور میدان خارجی دارای سرعت $\vec{v}$ می‌شود و تا برخورد بعدی در مدت زمان (τ) دارای همین سرعت می‌باشد .

سرعت الکترون در فاصلهٔ بین دو برخورد :

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\tau \Longrightarrow \vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

$$\vec{j} = \frac{I}{A} = \frac{q}{A\,dt} = \frac{-ne\,(v\,dt)\,A}{A\,dt} \Longrightarrow \vec{j} = -ne\vec{v}$$

(3)

چگالی جریان عبارتست از :

$\vec{J} = -ne\vec{v}$

$\vec{J} = -ne\left(-\frac{e\vec{E}}{m}\tau\right) =$

$\boxed{\vec{J} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}}$ $\Rightarrow$ مدل درود پیش بینی قانون اهم فلزات را دارد.

پس این مدل برای فلزات قانون اهم مناسب است ولی ...

رسانایی الکتریکی : $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$

آنچه در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود رسانایی الکتریکی (σ) یا عکس آن مقاومت ویژه فلز ρ می‌باشد e و m که مشخص است و n هم خود ویژگی فلز است اما سوال این است که τ چگونه اندازه‌گیری می‌شود؟

$\tau = \frac{m}{ne^2}\sigma = \frac{m}{ne^2}\frac{1}{\rho}$

توجه به واحدهای اندازه‌گیری بسیار لازم است.

$\tau = \frac{9.1\times10^{-31}\times4\pi\times(0.529\times10^{-10})^3}{3\times(1.6\times10^{-19})^2\times10^{-8}}\frac{1}{\rho_\mu}\left(\frac{r_s}{a_0}\right)^3$

با توجه به رابطه $\frac{1}{n} = \frac{4}{3}\pi r_s^3$ و با توجه به نسبت $\frac{r_s}{a_0}$ می‌توان رابطه فوق را بصورت زیر نوشت (!؟)

$\tau = \frac{0.22}{\rho_\mu}\left(\frac{r_s}{a_0}\right)^3\times10^{-14}$ (S)

اگر توجه کنیم در دستگاه انگلیسی واحد (ρ) مقاومت ویژه Ω.cm است

اگر بجای واحد طول cm و بجای واحد مقاومت ... استفاده کنیم واحد مقاومت ویژه میکرو اهم است (ρ_μ) $\times10^{-8}$

Na	1.56	1.54×10^{-3}
Fe	8.9	
Al	2.45	

با توجه به مقادیری که برای ρ برای فلزات مختلف داریم و با توجه به نسبت $\left(\frac{r_s}{a_0}\right)$ می‌توان نتیجه گرفت که τ عدد بسیار کوچکی است و order آن حدود 10^{-14} است.

مسافت میانگین آزاد : $l = \bar{v}\tau$

نکته: مسیرهای پویش آزاد را با l نشان [illegible] ، τ نیز [illegible] زمان است که در زمان اتفاق [illegible]

[illegible] مستقل زمان است و این مسافت پویش آزاد را $10\,\mathring{A}$ با استفاده [illegible] خواهد داد

از تابع توزیع گاز کامل بولتزمن می‌دانیم:

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

که این‌جا رابطهٔ فوق را برای تک الکترون در نظر بگیریم:

$$\bar{v} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$k_B =$ ثابت بولتزمن

برای مثال اگر برای یک الکترون در دمای $T = 300K$ سرعت میانگین ... را بدست آوریم

$$\bar{v}_{rms} = \sqrt{\frac{3\times10^{-23}\times1.23\times300}{9.1\times10^{-23}}} = 1.16 \times 10^{5} \ \mathrm{m/s}$$

$$l = 1.16\times10^{5} \times 10^{-14} \sim 10^{-9}\ m \sim 10\ \mathring{A}$$

توجه:

خیلی مهم است که بدانیم زمان پویش آزاد از $10^{-14}\ s$ order و همه سرعت متوسط یعنی از order $10^{5}\ \mathrm{m/s}$ و مسافت

پویش آزاد از order ، $1-10\ \mathring{A}$ است که قابل مقایسه با ساختار ریزاتمی است این نتیجه با منشأ دوری از تجدید ساختار است.

[illegible] مدل درود

برخورد الکترون:

قانونهای حرکت در مدل درود کلاسیکی است (یادآوری)

الکترون در لحظهٔ t دارای ممنتوم $\vec{P}(t)$ می‌باشد. بعد از تحول زمانی dt ممنتوم آن بصورت روبرو تغییر می‌کند:

$$\vec{P}(t) \longrightarrow \vec{P}(t+dt)$$

که تغییر تحت میدانهای خارجی صورت می‌گیرد.

برای اینکه ممنتوم بصورت فوق تغییر کند باید در مدت زمان dt الکترون هیچ برخوردی انجام ندهد.

برای تک الکترون عبارت $\frac{dt}{\tau}$ به معنای احتمال برخورد در بازهٔ زمانی $t+dt$ و t. (*)

به زبان مکانیک آماری $\frac{dt}{\tau}$ به معنای تعداد برخوردها در بازهٔ dt است.

پس با توجه به رابطهٔ (*) می‌توان احتمال برخورد نکردن الکترون را می‌توان بصورت روبرو: $\left(1-\frac{dt}{\tau}\right)$

عدم برخورد

تعریف کرد.

$\left(1-\frac{dt}{\tau}\right)$ = احتمال عدم برخورد

با توجه به $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$ $(dp = F\,dt)$ می‌توان تغییر تکانه را در $\vec{P}(t+dt)-\vec{P}(t)=\left(1-\frac{dt}{\tau}\right)(\vec{F}\,dt)$ (*)

صورت عدم برخورد را به صورت روبرو نوشت.

اگر تنها در حد معلومات فیزیک عالی رابطه فوق را می‌نوشتیم به صورت $p(t+dt)-p(t)=F\,dt$ بود.

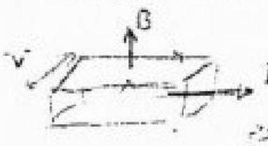
ولی در این رابطه احتمال برخورد را در نظر نگرفتیم. در همین رابطه می‌توان گفت $\tau \to \infty$ می‌باشد یعنی در حالت کلی رابطه (*) درست است.

$$\frac{P(t+dt)-P(t)}{dt}=\vec{F}-\frac{\vec{P}}{\tau} \implies \frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}-\frac{\vec{P}}{\tau}$$

وجود جمله دوم در سمت راست به دلیل وجود یونها و به علت وجود برخوردهای بین الکترون و یونها می‌باشد. که اگر $\tau \to \infty$ رابطه فوق به رابطه آشنای $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$ می‌رسیم.

در پدیده هال الکترون با یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی روبروست.

در پدیده هال دو کمیت مهم است: ثابت هال و مگنتو رزیستانس magnetoresistance



در اثر هال وجود میدان E و B باعث ایجاد یک اختلاف پتانسیل هال می‌شود. بررسی آن می‌شود.

$$\vec{F}=e\left(\vec{E}+\frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad q=-e$$

$$\vec{B}=B_0\hat{k}$$

$$\vec{E}=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}$$

$$\vec{V}=V_x\hat{i}+V_y\hat{j}$$

که برای محاسبه تکانه در حالت تعادل $\vec{V}\times\vec{B}=-V_xB_0\hat{j}+V_yB_0\hat{i}$

$\Longrightarrow$ با توجه به ریاضیات الکترون داریم

$$\begin{cases} \dfrac{dP_x}{dt} = -eE_x - \dfrac{e}{c}V_y B_0 - \dfrac{P_x}{\tau} \\ \dfrac{dP_y}{dt} = -eE_y + \dfrac{e}{c}V_x B_0 - \dfrac{P_y}{\tau} \\ \dfrac{dP_z}{dt} = -\dfrac{P_z}{\tau} \end{cases}$$

اگر بخواهیم کمیت‌ی تعریف را با توجه به این روابط بدست آوریم باید سیستم به حال تعادل رسیده باشد یعنی مقدار مدتی که اختلاف پتانسیل ثابت شده باشد باید اندام کنیم می‌توان گفت حالت تعادل وقتی ایجاد می‌شود که:

* معادله‌ی تعادل : $\frac{d\vec{P}}{dt}=0$ *

با توجه به شرط تعادل معادلات فوق به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} -eE_x - \dfrac{e}{c}V_y B_0 - \dfrac{P_x}{\tau} = 0 \\ -eE_y + \dfrac{e}{c}V_x B_0 - \dfrac{P_y}{\tau} = 0 \end{cases}$$

می‌توانیم از روابط $\vec{J} = -ne\vec{V}$ و $\vec{P} = m\vec{v}$ استفاده کنیم: دو رابطه را در n ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -neE_x + \dfrac{J_y}{c}B_0 - m_e\dfrac{nV_x}{\tau} \\ 0 = -neE_y - \dfrac{J_x}{c}B_0 - m_e\dfrac{nV_y}{\tau} \end{cases} \xRightarrow{\tau = \frac{m_e\sigma}{ne^2}} \begin{cases} 0 = -neE_x + \dfrac{J_y B_0}{c} + \dfrac{ne}{\sigma}J_x \\ 0 = -neE_y - \dfrac{J_x B_0}{c} + \dfrac{ne J_y}{\sigma} \end{cases}$$

در حالت تعادل $\boxed{J_y = 0}$ می‌باشد ⇐

$$J_y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = -neE_x + \dfrac{ne}{\sigma}J_x & (I) \\ 0 = -neE_y - \dfrac{J_x B_0}{c} & (II) \end{cases}$$

مقاومت مغناطیسی (Magneto resistance):

با توجه به معادله (I) در دستگاه فوق: $\rho_{Magnetoresistance} = \dfrac{E_x}{J_x} \Rightarrow \rho_{magneto} = \dfrac{1}{\sigma}$ ρ تعریف

این رابطه نشان می‌دهد $\rho_{magneto}$ برابر ρ یعنی مقاومت ویژه بدون حضور میدان مغناطیسی است

$$\rho_{magneto} = \rho_0 = \frac{1}{\sigma}$$

PAPCO

تعریف ثابت هال:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x H}$$

میدان مغناطیسی

E_y را میدان هال می‌نامند.

با توجه به معادله II در دستگاه فوق

$$R_H = -\frac{1}{nec}$$

در مدل درود:

نتیجه‌ای که می‌گیریم ثابت هال به میدان مغناطیسی بستگی ندارد و تنها به n مقدار الکترون‌های رسانش در واحد حجم فلز بستگی دارد و منفی است.

اما آزمایش نشان می‌دهد:

اگر میدان مغناطیسی را تغییر دهیم ثابت هال نیز تغییر می‌کند ولی موضوع را مدل درود توجیه نمی‌کند.

ثانیاً: در آزمایش مشاهده می‌کنیم با تغییر میدان مغناطیسی در بعضی نواحی R_H علامت مثبت به دست می‌آید ولی اصلاً قابل توجیه نیست. چون اگر بگوییم بار الکترون مثبت است ولی فرض ما چون از ابتدا حامل بار را الکترون رسانش تعریف کرده بود.

در آزمایش مشاهده می‌کنیم R_H نه تنها به مقدار میدان مغناطیسی بستگی دارد بلکه به راستای آن نیز بستگی دارد.

هدایت [illegible]

اگر میدان الکتریکی وابسته به زمان را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{E} = Re\left(\hat{\vec{E}}(r)\, e^{-i\omega t}\right)$$

دینامیک الکترون درود $\Longrightarrow$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{\vec{P}}{\tau} - e\vec{E}(r)\, e^{-i\omega t}$$

$$\Longrightarrow -i\omega \hat{\vec{P}} = -\frac{\hat{\vec{P}}}{\tau} - e\,\hat{\vec{E}}(r)$$

$$\vec{P}(t) = \underbrace{\hat{\vec{P}}}_{?}\, e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{P}}\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right) = -e\,\hat{\vec{E}}(r) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\vec{P}} = \frac{-e\,\hat{\vec{E}}(r)}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$$

$$\Longrightarrow \vec{P}(t) = \frac{-e\,\vec{E}(t)}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = -ne\frac{\vec{P}}{m}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{ne^2}{m}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega}\right)\vec{E}(t) \Longrightarrow \boxed{\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{1}{1-i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}}$$

ولی تجربه و آزمایش تابعیت σ از ω را بسیار پیچیده‌تر نمایش می‌دهد.

جلسه قبل هدایت الکتریکی AC در مدل درود $\sigma = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}$ به دست آوردیم. اگر علاوه بر میدان الکتریکی میدان مغناطیسی هم وجود داشته باشد.

$$F = -e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{H}\right)$$

$$|\vec{j}| = 1\,\frac{A}{mm^2} = 10^6\,A/m^2$$

$\vec{J} = nev \qquad |v| = \frac{|j|}{ne} = \frac{10^6}{1.29 \times 1.6\times10^{-19}} = 10^{-4}\,m/s$

$$\frac{v}{c} = \frac{10^{-4}}{10^{8}} = 10^{-12}$$

توجه :

در رابطه $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{P}}{\tau}$ فرض کردیم در یک لحظه نیرویی که هر یک از الکترون‌ها وارد می‌شود یکسان است.

در میدان الکتریکی $E(t) = E(r)e^{-i\omega t}$ میدان در هر لحظه به مکان ذره بستگی دارد (تابع مکان) با توجه به این تغییرات مکانی طول موج تعریف می‌شود.

با فرض اینکه تغییرات مکانی آرام باشد یعنی طول موج آن نسبت به مسافت پویش آزاد بسیار بزرگ باشد

$$\lambda \gg l$$

در این صورت می‌توانیم از دینامیک الکترونی درود ($\frac{dP}{dt} = F - \frac{\vec{P}}{\tau}$) استفاده کنیم.

شفافیت

حالا می‌خواهیم بررسی کنیم نور را با چه فرکانسی (ω) بتابانیم که از فلز عبور کند.

مدل درود پیش‌بینی اهمی‌بودن فلزات را می‌کند: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

برای بحث شفافیت از معادلات ماکسول استفاده می‌کنیم:

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\nabla^2 E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times H \Rightarrow$$

$$-\nabla^2 E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{4\pi}{c}\underbrace{\vec{J}}_{\vec{J}=\sigma\vec{E}\ \text{اهمی}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\Big)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\Big) \quad ; \quad \vec{E}(t) = E(r)\, e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 E = -\frac{1}{c}\Big(-\frac{i\omega 4\pi\sigma}{c}\vec{E}(t) - \frac{\omega^2}{c}\vec{E}(t)\Big)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 E = \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\Big(1 + \frac{i4\pi\sigma}{\omega}\Big)}_{\varepsilon(\omega)}\vec{E}$$

گفتیم با فرض $\lambda \gg a$ مدل درود بیان می‌کند $\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$

$$\Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 + i\frac{4\pi}{\omega}\Big(\frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}\Big) = 1 - \Big(\frac{4\pi\sigma_0\tau}{1+\omega^2\tau^2}\Big) + i\frac{4\pi\sigma_0}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}$$

$$\varepsilon(\omega) = \Big(1 - \frac{4\pi\sigma_0\tau}{\omega^2\tau^2}\Big) + i\frac{4\pi\sigma_0\tau}{\omega^3\tau^3} \Rightarrow$$

$$\varepsilon(\omega) \simeq 1 - \frac{4\pi\sigma_0}{\omega^2\tau} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad ; \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi\sigma_0}{\tau}$$

شرط شفافیت این است $\varepsilon(\omega)$ عددی مثبت باشد

$$\varepsilon(\omega) > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \geq \omega_p$$

پس ω باید در دو شرط $\omega\tau \gg 1$ و از ω_p بزرگتر باشد تا فلز شفاف باشد.

حال می‌خواهیم از نظر مقداری ω_p را بررسی کنیم:

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi\sigma_0}{\tau} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \rightarrow \frac{\sigma_0}{\tau} = \frac{ne^2}{m}$$

$$n^{-1} = \frac{4}{3}\pi r_s^3 = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \left(\frac{r_s}{a_0}\right)^3$$

$$\Rightarrow \omega_p = (2\pi \times 11.36)\left(\frac{r_s}{a_0}\right)^{-3/2} \times 10^{15} \ \mathrm{rad/s} \qquad ?$$

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 11.36\left(\frac{r_s}{a_0}\right)^{-3/2} \times 10^{15} \ \mathrm{Hz}$$

$\omega_p\tau = ?$

$$\omega_p\tau = 1.57 \times 10^2 \left(\frac{r_s}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{\rho_\mu}\right)$$

این عبارت نشان می‌دهد $\omega_p\tau$ در حدود چند صد باشد

با وجود $\omega \geq \omega_p$ شرط $\omega\tau \gg 1$ حاصل می‌شود.

?

$\lambda_p = ?$

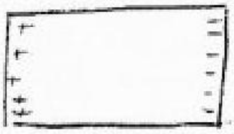
$$\lambda_p = \frac{1}{\nu_p} = (0.26)\left(\frac{r_s}{a_0}\right)^{3/2} \times 10^3 \ \mathring{A}$$

پس اگر λ_p از order $10^3 \ \mathring{A}$ یا $10^{15} \ \mathrm{Hz}$ برای ν_p باشد شفافیت برقرار است.

مثال: سدیم $\frac{r_s}{a_0} \simeq 4$

λ_p	تئوری	تجربی
Na	2.02	2.1
K	2.8	3.1

اندیس p در کمیت λ_p و ν_p از کلمهٔ plasmon گرفته شده است.



در زمان کوچکی اختلالی مثل زیر در فلز ایجاد می‌کنیم که آرایش بار مثبت و منفی را به صورت زیر ایجاد می‌کند می‌خواهیم ببینیم آیا آرایش بار فوق مجدداً تغییر می‌کند و برمی‌گردد یا نه؟

شرطی که برای انتشار اختلال در فلز پیدا می‌کنیم شرط طولی روی ω ایجاد می‌کند: $\varepsilon = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} = 0$

$\Rightarrow \omega = \omega_p$

در صورتی که شرط اختلال برقرار شد موجی در فلز منتشر می‌شود که به این موج plasmon گفته می‌شود.

خواص [illegible]

اهمیت مدل درود در خواص حرارتی فلزات بود که بیان کرد.

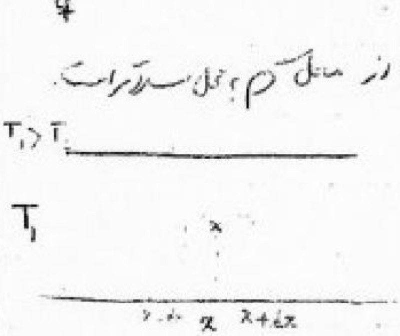
همانطور که قبلاً گفتیم تمام خواص فلز در مدل درود به الکترون‌های رسانش برمی‌گردد یعنی انتقال حرارت نیز از طریق الکترون‌های رسانش است. در مدل درود ما از یون‌ها و نقش آنها در انتقال حرارت صرف‌نظر می‌کنیم.

آنچه محاسبه می‌کنیم مقدار حرارتی که در واحد زمان از واحد سطح عبور می‌کند که

این کمیت ($\vec{j}_q$) با گرادیان حرارتی متناسب است $\vec{j}_q = -k\vec{\nabla}T$

با شرط مثبت بودن k علامت منفی نشان‌دهندهٔ انتقال حرارت از محل گرم به محل سردتر است.

و k ضریب هدایت حرارتی است.



اگر مقطعی را در مختصات x در نظر بگیریم الکترون‌هایی از مکان $x - dx$ و الکترون‌هایی از مکان $x + dx$ ممکن است به محل x برسند.

چون تابع توزیع بولتزمن را در نظر می‌گیریم [برای گاز کامل = گاز الکترون] تعداد ذراتی که از مکان $x+dx$ به مکان x می‌رسند برابر تعداد ذراتی هستند که از $x-dx$ به x می‌رسند یعنی هر کدام کل $\frac{n}{2}$ باشد تعداد آنها $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}$ است.

با توجه به توضیح دوره‌ی قبل، الکترونی که در دمای بالاتر برخورد می‌کند انرژی جنبشی‌اش از برخورد قبلی بیشتر است.

$$j_x^q = \frac{n}{2}\, \underbrace{v}_{\text{سرعت الکترون}}\, \underbrace{\varepsilon}_{\text{انرژی الکترون}}$$

$$\Rightarrow \quad j_x = \frac{n}{2}\left[v(x-dx)\,\varepsilon(x-dx) - v(x+dx)\,\varepsilon(x+dx)\right]$$

با توجه به توضیح دوره‌ی $\underset{}{\overset{\text{انرژی متوسط سمت چپ}}{\varepsilon(x-dx)}}$ بزرگتر از $\overset{\text{انرژی متوسط سمت راست}}{\varepsilon(x+dx)}$ است ولی سرعت متوسط الکترون در سمت چپ و راست یکسان است.

$$j_x^q = \frac{n}{2}\left(v_{(x)}\,\varepsilon(x-dx) - v_{(x)}\,\varepsilon(x+dx)\right)$$

$$j_x^q = \frac{n}{2} v_{(x)} \left[\left(\varepsilon_{(x)} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Big|_x (-dx)\right) - \left(\varepsilon_{(x)} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Big|_x (dx)\right) \right]$$

$$j_x^q = -n\, v_{(x)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = -n\, v_{(x)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}\, dx$$

dx : در واقع مسافت پویش آزاد است. $\quad dx = v_{(x)}\tau$

$$j_x^q = -n\, v_{(x)} \frac{\partial \varepsilon\, \partial T}{\partial T\, \partial x} v_{(x)}\, \tau$$

$$j_x^q = -n\, v_{(x)}^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\tau$$

در عبارت دوره:

$(v_x^2 = \overline{v_x^2})$

با توجه به تابع توزیع بولتزمن هیچ جهتی به جهت دیگر برتری ندارد:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\,\overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

$$j_x^q = -n\left(\frac{1}{3}\overline{v^2}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\tau$$

$$j_y^q = -n\left(\frac{1}{3}\overline{v^2}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\tau \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_q = j_x^q\,\hat{i} + j_y\,\hat{j} + j_z\,\hat{z}$$

$$j_z^q = -n\left(\frac{1}{3}\overline{v^2}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\tau$$

$$\Rightarrow \vec{j}_q = -\frac{n\tau}{3}\left(\overline{v^2}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\vec{\nabla}T \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{n\tau}{3}\left(\overline{v^2}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)}$$

ε انرژی متوسط یک الکترون است که تنها از نوع جنبشی است: $\varepsilon = \frac{1}{2}m_e\overline{v^2}$

با توجه به قانون توزیع بولتزمن $\frac{1}{2}m_e\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow \overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m_e}$

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V$$

چون حجم فلز تقریباً ثابت است $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ گرمای ویژه در واحد حجم در نظر می‌گیریم:

$$K = \frac{n\tau}{3}\left(\frac{3k_B T}{m_e}\right)C_v$$

$$C_v = \frac{\partial (n\varepsilon)}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(n\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{3}{2}nk_B$$

$$\Rightarrow K = \frac{\tau}{3}\left(\frac{3k_B T}{m_e}\right)\left(\frac{3nk_B}{2}\right) \Rightarrow$$

$$K = \frac{3k_B^2 n\tau}{2m_e}\,T$$

در مورد نسبت $\frac{K}{\sigma}$ می‌توان نسبت هدایت حرارتی به هدایت الکتریکی فلزات را محاسبه کرد

$\frac{K}{\sigma} \sim T$ قانون ویدمن-فرانس

σ: منظور هدایت الکتریکی DC است.

$\frac{K}{\sigma T}$ = ثابت لورنتس

ثابت لورنتس: برای عنصرات مختلف و در دماهای مختلف یکسان است.

قانون ویدمن فرانتس: نسبت $\frac{K}{\sigma}$ مورد لحاظ است.

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{\frac{3k_B^2}{2m_e} n\tau T}{\frac{ne^2\tau}{m_e}} = \frac{3}{2}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 T$$

کمیتی که در آن τ حذف شود بیشتر با آزمایش‌ها و تجربیات توافق دارند.

$\Rightarrow$ ثابت لورنتس $= \frac{3}{2}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2$

$k_B = 1.32\times10^{-13}$

ثابت لورنتس $= 1.24\times10^{-13} \left(\frac{erg}{esu\cdot K}\right)^2$

$\quad = 1.11\times10^{-8} \left(\frac{wat\cdot\Omega}{K^2}\right)^2$

مثال: از لحاظ تجربی:

	Na	Cu	Fe
تجربی ثابت لورنتس	2.12×10^{-8}	2.2×10^{-8}	2.6×10^{-8}

آنچه مشخص شود را ~~[illegible]~~ مشاهده کرد بدست آوردن عدد $1.11\times10^{-8}\frac{wat\,\Omega}{K^2}$ برای ثابت لورنتس است.

جلسه چهارم: شنبه 82.12.6

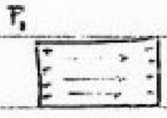
اثر ترموالکتریک (اثر Seebeck)

هرگاه یک گرادیان حرارتی وجود داشته باشد یک میدان ایجاد می‌شود.

ضریب توان حرارتی (Terme power):

$$\vec{E}_Q = Q\vec{\nabla}T$$

Q ضریب ترموپاور است.



$T_2 < T_1$

الکترونها در ناحیه با دمای T_1 دارای انرژی بیشتری هستند از محل خود جدا می‌شوند و در انتهای دیگر تجمع می‌کنند پس از مدتی تعدادی الکترون در سمت دیگر مثلاً سمت راست جمع می‌شوند و یک میدان الکتریکی ایجاد می‌شود که بعد از این این میدان از حرکت الکترونها جلوگیری می‌کند (سمت چپ) و نیرویی در خلاف جهت میدان به آنها وارد می‌کند.

(ما همواره اندازه‌گیری را در حالت تعادل انجام می‌دهیم)

چون گرادیان دمای وجود دارد الکترونها در این برخوردها سرعت می‌گیرند.

T_1 $v(x+v\tau)$ T_2

$v(x-v\tau)$

(اکنون گرادیان دمای ایجاد شده و هنوز به حالت تعادل نرسیده است)

سرعت متوسطی که ایجاد می‌شود به جهت گرادیان دمای است.

$$\bar{v}_x^{Q} = \frac{1}{2}\left(v(x-v\tau) - v(x+v\tau) \right)$$

چون τ خیلی کوچک و از order $10^{-14}\,s$ است بسط تیلور عبارت بالا بصورت زیر است

$$\bar{v}_x^{Q} = \frac{1}{2}\left\{ v_{(x)} + \frac{\partial v_x}{\partial x}(v\tau) - v_{(x)} - \frac{\partial v_x}{\partial x}(v\tau) \right\}$$

$$\bar{v}_x^{Q} = -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\tau \quad \Rightarrow$$

$$\bar{v}_x^{Q} = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_x^2}{\partial x}\tau = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_x^2}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\tau$$

$$\begin{cases} \bar{v}_x^{Q} = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x^2}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\tau \\ \bar{v}_y^{Q} = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y^2}{\partial T}\right)\frac{\partial T}{\partial y}\tau \\ \bar{v}_z^{Q} = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_z^2}{\partial T}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\tau \end{cases} \qquad \bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3}\bar{v}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_x^{Q} = -\frac{1}{6}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\tau \\ \bar{v}_y^{Q} = -\frac{1}{6}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}\tau \\ \bar{v}_z^{Q} = -\frac{1}{6}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\tau \end{cases} \Rightarrow \bar{V}^{Q} = -\frac{1}{6}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial T}(\nabla T)\,\tau$$

حالت پایدار

حالت تعادل زمانی است که میدان $\vec{E}$ ایجاد شود

$$\vec{v}_E^{\,\text{سوق الکتریکی}} = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

حالت پایدار زمانی است که سرعتی که میدان الکتریکی ایجاد می‌کند برابر سرعتی شود که گرادیان دمای ایجاد می‌کند و اثر یکدیگر را خنثی کنند

$$\vec{v}_E + \vec{v}^{Q} = 0$$

در حالت پایدار سرعت متوسط در هر نقطه صفر است یعنی سرعت هر ذره که از سمت داغ به سمت سرد حرکت می‌کند برابر عکس آن است.

$K_B = 1.3 2 \; 10$

$$-\frac{e\vec{E}}{m}\tau - \frac{1}{6}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial T}\vec{\nabla}T\,\tau = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \left(-\frac{m}{6e}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial T}\right)\vec{\nabla}T \quad \Longrightarrow ①$$

$$u = n\frac{1}{2}m\bar{v}^2 \quad , \quad C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$$

حساب درود : انرژی U در واحد حجم برای الکترونها رسانش

چون گاز الکترونی را یک گاز کامل در نظر گرفت از تابع توزیع بولتزمن استفاده می‌کنیم چون درجه آزادی آن 3 است ⇐

$$u = n\left(\frac{3}{2}k_B T\right) \Rightarrow \underline{C_v = \frac{3}{2}nk_B}$$

با استفاده از این رابطه می‌تواند ثابت Terme power را بر اساس C_v نوشت

$$Q = -\frac{1}{3en}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}nm\bar{v}^2\right)}{\partial T}$$

$$① \quad \boxed{Q = -\frac{1}{3ne}C_v}$$

$$③ \quad Q = -\frac{1}{3ne}\left(\frac{3}{2}nk_B\right) = \frac{-k_B}{2e} = \boxed{0.93 \times 10^{-4}\ V/K}$$

اشکال مدل درود :

* عددی که در آزمایشگاه برای ضریب Terme power بدست آمده است از order، 10^{-6} است یعنی

خیلی کوچکتر از ③ عددی است که درود بدست آورده است. تئوری درود 100 برابر آزمایش است .

یکی از علل این اشکال بزرگ بدست آوردن C_v در نظریه درود است.

** مشکل بزرگتر : گاهی اوقات Q مثبت بدست می‌آید در این صورت مشکل به فرض اساسی مدل درود یعنی حاملها

بار [الکترونهای رسانش] برمی‌گردد.

نقاط قوت مدل درود : هدایت DC [قانون اهم] - هدایت حرارتی

نقاط ضعف مدل درود : اثر هال ، هدایت AC ، اثر ترمو الکتریک

این مدل (اولین مدلی) بعد از پیدایش اصول کوانتوم مکانیکی مطرح شد

یکی از اصول مطرح این بود که تابع توزیع الکترونها ماکسول بولتزمن در نظر گرفته نشود بلکه تابع توزیع فرمی دیراک است. [چون الکترونها فرمیونها هستند و دو الکترون با حالت یکسان نمی‌توانند کنار هم قرار بگیرند]

آیا مدل زومرفلد کاملاً کوانتومی است؟ این مدل یک مدل نیمه کلاسیکی است [اکثراً کلاسیکی و بخشی از آن کوانتومی است].

فرضیات زومرفلد:

قوانین دینامیک آنها را کلاسیکی در نظر گرفت و فرضیات زومرفلد همان فرضیات درود بود و تفاوت‌ها آن اندک بود.

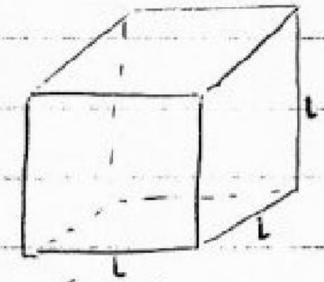
* زومرفلد از مکانیک آماری کوانتومی استفاده کرد درحالی که درود از مکانیک آماری کلاسیک استفاده کرد.

اکنون باید توجه کنیم که چگونه ذره (الکترون) با خاصیت [illegible] از مکانیک کلاسیک تبعیت کند ولی از مکانیک هم آماری کوانتومی تبعیت کند؟

انتظار داریم که هرجا آمار مطرح شود در اولویت از آمار کوانتوم مکانیکی استفاده نماییم ولی در جاهایی که با کمیت آماری روبرو نیستیم نتیجه‌ها یکسان است. مثل خواص الکتریکی و...

گاز فرمیونی:

چون الکترونهای رسانش را آزاد در نظر گرفتیم می‌توانیم آن را یک ذره در جعبه فرض کنیم: جعبه را مکعبی در نظر می‌گیریم چون تقارنی که ما حساب و کتاب‌ها را بررسی می‌کنیم شکل جعبه مهم نیست زیرا در شکل‌ها یکسان است. [مکعب ساده‌ترین شکل می‌باشد]



چون مدت لازم مستطیل کافی است ما یک ذره را در حجم در نظر بگیریم.

$$H\Psi = E\Psi$$

چون می‌خواهیم کمیتهای انتقال حرارت و هدایت الکتریکی را بررسی کنیم باید شرایط مرزی را طوری در نظر بگیریم که الکترون بتواند از مرز عبور کند.

نتایجی که بدست می‌آوریم به سطح و مرز بستگی ندارد. روشی که شرایط مرزی را شرط پریودیک [Born-Von-Karman] در نظر بگیریم.

$$\Psi(x,y,z) = \Psi(x+L,y,z)$$
$$= \Psi(x,y+L,z)$$
$$= \Psi(x,y,z+L)$$

از نظر توپولوژی این شرط یعنی اینکه ما مرزها را حذف کردیم.

این شرایط بسیار مناسبند مگر برای بررسی کمیتهایی که به سطح و مرز وابستگی دارد [مثل ضریب بازتاب]

ابعاد ذره نسبت به ابعاد حجم بسیار کوچک است تابع موج ذره در این حجم بصورت روبرو است:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad , \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\begin{cases} k_x L = 2\pi n_x \\ k_y L = 2\pi n_y \\ k_z L = 2\pi n_z \end{cases} \Rightarrow \vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\frac{4\pi^2}{L^2}$$