گرادیان $(\nabla\psi)$:

[illegible] : $\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}$

[illegible] : $\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\hat{e}_3$

$$\nabla\psi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3}\partial_i\psi\,\hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3}\hat{e}_i\,\partial_i\psi =$$

$$= \hat{e}_i\,\partial_i\psi \qquad \nabla = \sum_{i=1}^{3}\hat{e}_i\,\partial_i = \hat{e}_i\,\partial_i$$

گرادیان اسکالر است یا بردار؟

فرض: $\varphi(x, y, z) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ یک تابع اسکالر باشد.

$$\to \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \to$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} \to \frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (1)$$

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (2)$$

در دستگاه دکارتی

$$1,2 \to \frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

مولفه گرادیان φ در دستگاه پریم دار

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

مؤلفه گرادیان (i) φ در دستگاه.
بردن (i) یک پریم

$\Rightarrow$ $\nabla \varphi$ بردار است.

مثال: فرض: $f = f(r)$ $\quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right)\hat{k} =$$

$$= \frac{df}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}\right) = \frac{df}{dr}(\nabla r)$$

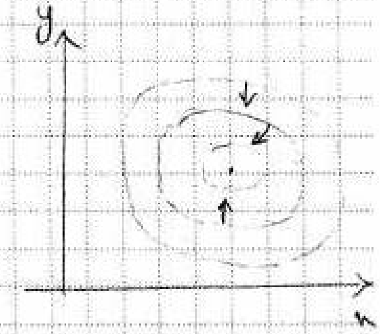
مثال: $f(r) = e^{i\alpha r} = e^{i\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad \frac{df}{dr} = i\alpha e^{i\alpha r}$

$$\nabla r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{k} =$$

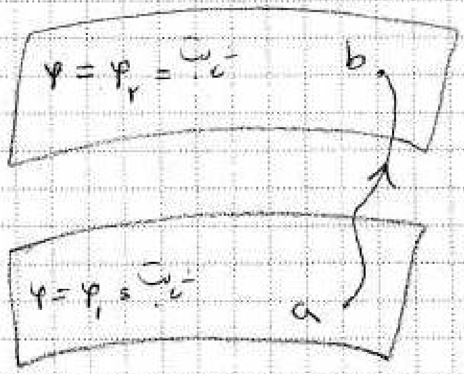
$$= \frac{1}{r}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{e}_r = \hat{r}$$

تفسیر هندسی گرادیان :

یادآوری : $f = f(x, y, z)$ $\qquad z = f(x, y)$



$\nabla f = ?$



فرض : $\varphi = \varphi(x, y, z)$

چه مسیری بین نقاط a و b سبب max تغییرات در تابع φ می‌شود؟

بردار جابجایی در فضا $\vec{dr} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$$\nabla\varphi \cdot \vec{dr} = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\hat{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} dx_j\,\hat{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx_j\, \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx_i =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = d\varphi \rightarrow$$ دیفرانسیل φ (تغییرات)

جابجایی در راستای $\nabla\varphi$ سبب max تغییرات در تابع φ می‌شود. $\rightarrow$ تعبیر هندسی

نتیجه : $d\varphi = \nabla\varphi \cdot \underbrace{\vec{dr}}_{\text{جابجایی}}$ ①

نشان میدهیم: ارتباط نیرو با انرژی پتانسیل: (اگر $\vec{F}$ پایستار باشد.)

میدانیم: $U(\vec{r}) = -\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} \longrightarrow dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$ (۲)

فرض میکنیم $U_a = 0$

$\xrightarrow{۱ و ۲} \vec{F} = -\nabla U$

جهت هماهنگی مدل ریاضی با طبیعت

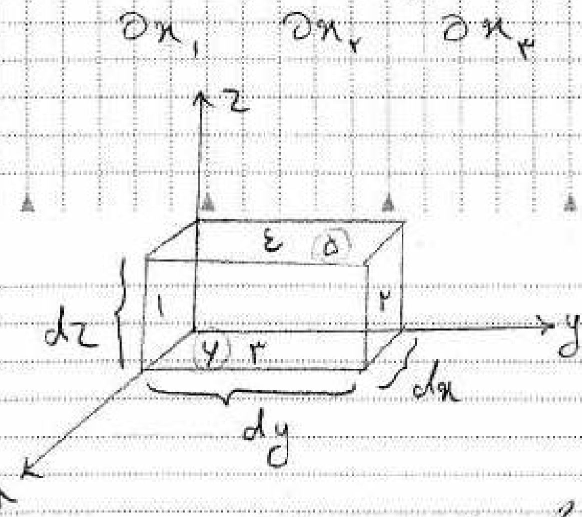
برای اینکه آب آبشار پایین بریزد.

دیورژانس (واگرایی):

میدانیم: $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i A_i = \partial_i A_i$$

تعبیر فیزیکی (هندسی):



یک عنصر حجم به حجم $dv = dx\,dy\,dz$

را در نظر میگیریم. فرض میکنیم این عنصر حجم

در داخل یک شاره تراکم ناپذیر قرار داشته باشد. ... را به عنوان

تابع چگالی شاره را در نظر می‌گیریم که تابعی از مکان است.

$\rho = \rho(x, y, z)$ ، سرعت شاره در هر نقطه را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = v_x(x,y,z)\,\hat{i} + v_y(x,y,z)\,\hat{j} + v_z(x,y,z)\,\hat{k}$$

کمیت $\rho\vec{v}\cdot\hat{n}\,da$ بیانگر شارش شاره مورد نظر از عنصر سطح $\hat{n}\,da$ می‌باشد

عنصر دیفرانسیلی شارش جرمی $d\phi_m = \rho\vec{v}\cdot\hat{n}\,da$

آنچه مورد نظر ماست، محاسبه شار خالص گذرنده از عنصر حجم dv می‌باشد.

از آنجایی که عنصر حجم dv از شش سطح ساخته شده، که روی هم یک سطح بسته ایجاد می‌کنند عبارت شار جرمی را باید برای تک تک سطوح محاسبه نمود.

$$1\begin{cases}\hat{n}_1 = -\hat{j} = -\hat{e}_y\\ da = dx\,dz\end{cases} \qquad 2\begin{cases}\hat{n}_2 = \hat{j} = \hat{e}_y = -\hat{n}_1\\ da = dx\,dz\end{cases}$$

$$3\begin{cases}\hat{n}_3 = -\hat{k} = -\hat{e}_z\\ da = dx\,dy\end{cases} \qquad 4\begin{cases}\hat{n}_4 = \hat{k} = \hat{e}_z = -\hat{n}_3\\ da = dx\,dy\end{cases}$$

$$5\begin{cases}\hat{n}_5 = -\hat{i} = -\hat{e}_x\\ da = dy\,dz\end{cases} \qquad 6\begin{cases}\hat{n}_6 = \hat{i} = \hat{e}_x = -\hat{n}_5\\ da = dy\,dz\end{cases}$$

خواسته مسأله $\Leftarrow$ $\phi_m = \oint_S d\phi_m = \oint_S \rho\vec{v}\cdot\hat{n}\,da$

$S \rightarrow$ سطح بسته دربرگیرنده حجم dv یعنی $\quad S = 1+2+3+4+5+6$

$$1 \quad \int_1 \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\,da = -\int_1 \rho_1(x,y,z)\, v_{y_1}(x,y,z)\,dx\,dz$$

$$2 \quad \int_2 \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\,da = \int_2 \rho_2(x,y,z)\, v_{y_2}(x,y,z)\,dx\,dz$$

$$3 \quad \int_3 \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\,da = -\int_3 \rho_3(x,y,z)\, v_{z_3}(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$4 \quad \int_4 \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\,da = \int_4 \rho_4(x,y,z)\, v_{z_4}(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$5 \quad \int_5 \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\,da = -\int_5 \rho_5(x,y,z)\, v_{x_5}(x,y,z)\,dy\,dz$$

$$6 \quad \int_6 \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\,da = \int_6 \rho_6(x,y,z)\, v_{x_6}(x,y,z)\,dy\,dz$$

بسط تیلور:
$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x) + \cdots$$

$$\rho_2(x,y,z) = \rho_1(x, y+dy, z)$$

$$v_{y_2}(x,y,z) = v_{y_1}(x, y+dy, z)$$

$$(\rho v_y)_2 = \left(\rho(x,y+dy,z)\, v_y(x,y+dy,z)\right)_1 \overset{\text{بسط تیلور}}{=}$$

$$= (\rho v_y)_1 + (y+dy-y)\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)\Big|_1 + \cdots \quad \text{V}$$

اگر $f = f(x,y)$ $f(0,0) =$ معلوم

$$f(x,y) = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2!}y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{2!}xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2!}yx\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \cdots$$

①...⑦ → شار خالص عبوری از حجم dv در راستای محور y =

$$= -\int_1 (\rho v_y)_1\, dx\, dz + \int_2 \left[(\rho v_y)_1 + dy\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)\Big|_1\right] dx\, dz$$

از آنجایی که عنصر حجم dv دیفرانسیلی است (یعنی خیلی کوچک است) می‌توان انتگرالده را جایگزین انتگرال نمود.

$$\rightarrow -(\rho v_y)_1\, dx\, dz + \left[(\rho v_y)_1 + dy\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)\Big|_1\right] dx\, dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)\Big|_1\, dx\, dy\, dz$$

می‌توان این محاسبات را برای راستاهای x و z هم انجام داد.

جواب ↓

شار خالص عبوری از حجم dv در راستای محور x $= \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\Big|_5\, dx\, dy\, dz$

شار خالص عبوری از حجم dv در راستای محور z $= \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\Big|_{3} dx\,dy\,dz$

شار خالص عبوری از عنصر حجم dv $= \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]}_{\nabla\cdot(\rho\vec{v})} dx\,dy\,dz$

شار گذرنده از عنصر حجم dv در واحد حجم $= \nabla\cdot(\rho\vec{v})$

نتیجه: دیورژانس یک میدان برداری، بیانگر شار میدان در هر نقطه است.

(به عبارت دیگر بیانگر شار موضعی میدان است.)

$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

اگر $\vec{A}$ یک میدان برداری باشد، در محل چشمه میدان $\nabla\cdot\vec{A} > 0$ و در محل چاهک میدان $\nabla\cdot\vec{A} < 0$ است.

× یادداشت:

1) $\nabla\cdot\vec{r} = 3$

اثبات: $\nabla\cdot\vec{r} = \nabla\cdot(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} =$

$= 1 + 1 + 1 = 3$

$\nabla\cdot\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i\,\partial_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} x_j\,\hat{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_i x_j\,(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j)$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\partial_i x_j}_{\delta_{ij}} \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = 3$$

$$\left(\partial_i x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)$$

(2) φ یک تابع اسکالر و $\vec{A}$ یک تابع برداری

$$\varphi = \varphi(x,y,z)$$

$$\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$$

$$\rightarrow \nabla\cdot(\varphi\vec{A}) = \nabla\varphi\cdot\vec{A} + \varphi\,\nabla\cdot\vec{A}$$

(3) $\nabla\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) =$ بی‌معنی

(4) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

(5) $\nabla\cdot(f(r)\,\vec{r}) = \left[\nabla(f(r))\cdot\vec{r} + f(r)(\nabla\cdot\vec{r})\right] =$

$$= \frac{df}{dr}\underbrace{\hat{e}_r\cdot\vec{r}}_{r} + 3f(r) = \qquad \left(\frac{\vec{r}}{r} = \hat{e}_r \rightarrow \hat{e}_r\cdot\vec{r} = r\right)$$

$$= r\frac{df}{dr} + 3f(r)$$

$f(r)$ تابعی از اندازه r.

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = r\left(\frac{-3}{r^4}\right) + 3\,\frac{1}{r^3} = 0 \qquad (\text{اگر } r \neq 0)$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^n}\right) = r\left(\frac{-n}{r^{n+1}}\right) + 3\,\frac{1}{r^n} = \frac{3-n}{r^n}$$

کرل (چرخش):

می‌دانیم: $\nabla\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} +$

$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$\nabla\times\vec{A} \neq -\vec{A}\times\nabla$, $\nabla\times\vec{A} =$ بردار

$\vec{A}\times\nabla =$ اپراتور برداری

$\nabla\cdot\vec{A} =$ اسکالر $\qquad \vec{A}\cdot\nabla =$ اپراتور اسکالر

$$\nabla\times\vec{A} = \sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \underline{\partial_i A_j}\, \hat{e}_k = \sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\hat{e}_k$$

جای این دو مولفه هرگز با هم عوض نمی‌شود. $\longrightarrow A_j\partial_i$ غلط است.

داشت:

(۱) $\nabla\times\vec{r} = 0$

(۲) اگر φ تابع اسکالر و $\vec{A}$ تابع برداری باشد داریم:

$$\nabla\times(\varphi\vec{A}) = \nabla\varphi\times\vec{A} + \varphi\,\nabla\times\vec{A}$$

(۳) $\nabla \times (f(r)\,\vec{r}) = \nabla(f(r)) \times \vec{r} + f(r)\,\nabla \times \vec{r} =$

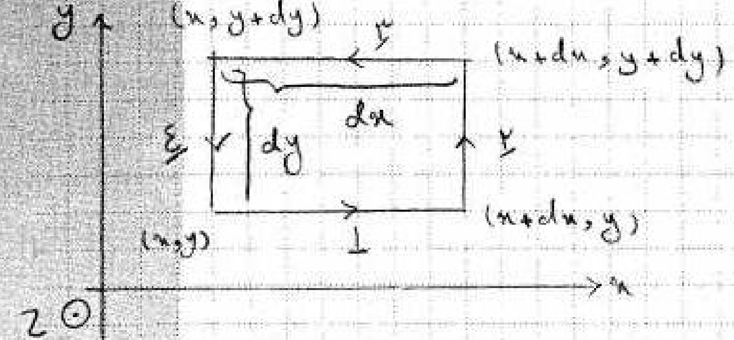
$$= \frac{df}{dr}\,\cancel{\hat{e}_r \times \vec{r}}^{\,0} + f(r)(0) = 0$$

$$\hat{e}_r \times \vec{r} = \hat{e}_r \times r\hat{e}_r = r(\hat{e}_r \times \hat{e}_r) = r(0) = 0$$

(۴) $\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{0}$

(۵) $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} + (\nabla\cdot B)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

تعبیر هندسی کرل:



می‌دانیم $\rightarrow \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4\right)\vec{A}\cdot d\vec{l}$ *

در این جا فرض می‌کنیم که $\vec{A}$ یک تابع برداری باشد به گونه‌ای که

$$\vec{A} = \vec{A}(r) = \vec{A}(x, y, z)$$

و $d\vec{l}$ عنصر طول در هر یک از مسیرها باشد که:

۱ $\rightarrow$ در طول مسیر ۱ $\rightarrow d\vec{l} = dx\,\hat{i} = dx\,\hat{e}_x$

۲ " " " " $\rightarrow d\vec{l} = dy\,\hat{j} = dy\,\hat{e}_y$ (۱)

۳ " " " " $\rightarrow d\vec{l} = -dx\,\hat{i} = -dx\,\hat{e}_x$

۴ " " " " $\rightarrow d\vec{l} = -dy\,\hat{j} = -dy\,\hat{e}_y$

$$* \overset{1}{=} \int_1 A_x\,dx + \int_2 A_y\,dy - \int_3 A_x\,dx - \int_4 A_y\,dy =$$

$$* = A_{x1}\,dx + A_{y2}\,dy - A_{x3}\,dx - A_{y4}\,dy =$$

$$= A_{x1}\,dx + \left(A_{y4} + \frac{\partial A_{y4}}{\partial x}dx\right)dy - \left(A_{x1} + \frac{\partial A_{x1}}{\partial y}dy\right)dx - A_{y4}\,dy =$$

$$= A_{x1}\,dx + A_{y4}\,dy + \frac{\partial A_{y4}}{\partial x}dx\,dy - A_{x1}\,dx - \frac{\partial A_{x1}}{\partial y}dx\,dy - A_{y4}\,dy =$$

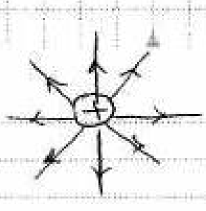
$$= \left(\frac{\partial A_{y4}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x1}}{\partial y}\right)dx\,dy = \underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{(\nabla\times\vec{A})|_z}dx\,dy$$

$$\rightarrow (\nabla\times\vec{A})\big|_z = \frac{\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}}{dx\,dy} \quad (2)$$

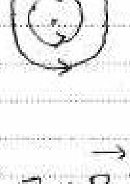
در روند بررسی فوق فرض کردیم مقدار تابع برداری $\vec{A}$ بر روی اضلاع ۱ و ۴ معلوم است. مقادیر متناظر برای A روی اضلاع ۲ و ۳ را با بسط تیلور بدست آوردیم.

با توجه به رابطه (۲) مولفه های کرل یک تابع برداری بیانگر چرخش موضعی تابع برداری می باشد.

$\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$



$\nabla\times\vec{B} \neq 0$



$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i = \int_S (\nabla\times\vec{B})\cdot\hat{n}\,da \longrightarrow$$ قضیه استوکس

☆ به واسطهٔ کوچک بودن طول مسیرها ، انتگرالده را جایگزین انتگرال می کنیم

× به واسطهٔ کوچک بودن dx فقط جملات تا مرتبه اول dx را نگه می داریم

میدان سیم لوله ای ← به میدانی می گویند که $\nabla\cdot\vec{A}=0$.

میدان غیر چرخشی ← به میدانی می گویند که $\nabla\times\vec{A}=0$.

کاربرد متوالی اپراتور ∇ ، دوتا اپراتور ∇ و توابع اسکالر و برداری φ ، $\vec{A}$

مفروض اند : $\vec{A}=\vec{A}(\vec{r})$ و $\varphi=\varphi(\vec{r})$

به کمک دو عمل نقطه و ضرب (. و ×) کلیه ترکیبات ممکن را بررسی می کنیم :

$\nabla\ \nabla\ \varphi = \nabla\nabla\varphi$ $\qquad$ $\nabla\cdot\nabla\varphi = (\nabla\cdot\nabla)\varphi = \nabla^2\varphi$

$\nabla\times\nabla\ \varphi = \nabla\times\nabla\varphi = 0$ $\qquad$ $\nabla\ \nabla\cdot\varphi =$ بی معنی

$\nabla\ \nabla\times\varphi =$ بی معنی

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \Big(\sum_i \partial_i \hat{e}_i\Big)\cdot\Big(\sum_j \partial_j\varphi\,\hat{e}_j\Big) =$$

$$= \sum_{ij} \underbrace{(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j)}_{\delta_{ij}}\,\partial_i\partial_j\varphi = \sum_i \partial_i\partial_i\varphi = \sum_i \partial_i^2\varphi =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

فرم $\nabla^2\varphi$ در دستگاه دکارتی

$\nabla^2 \longrightarrow$ اپراتور لاپلاسی (لاپلاسین)

$$\nabla\times\nabla\varphi = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i(\partial_j \varphi)\,\hat{e}_k =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i(\partial_j \varphi)\,\hat{e}_k + \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i(\partial_j \varphi)\,\hat{e}_k \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i(\partial_j \varphi)\,\hat{e}_k + \sum_{ijk} \varepsilon_{jik}\, \partial_j(\partial_i \varphi)\,\hat{e}_k \right\} =$$

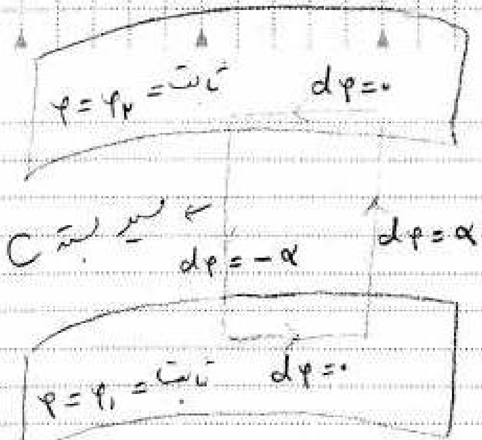
$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i(\partial_j \varphi)\,\hat{e}_k - \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j(\partial_i \varphi)\,\hat{e}_k \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_k \left(\cancel{\partial_i \partial_j \varphi - \partial_j \partial_i \varphi}\right) \right\} = 0$$

در اکثر موارد ترتیب مشتق گیری مهم نیست.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}$$

نتیجه: کرل گرادیان هر میدان اسکالری صفر است. به عبارت دیگر میدان برداری گرادیان حاصل از میدان اسکالر φ غیرچرخشی است.



$$\nabla\times\nabla\varphi = 0 \longrightarrow \oint_C \nabla\varphi\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C d\varphi = 0$$

$$\nabla\varphi\cdot d\vec{r} = \nabla\varphi\cdot d\vec{l} = d\varphi$$

دو ترکیب $\nabla\varphi . \nabla$ و $\nabla\varphi \times \nabla$ نیز وجود دارند که اولی یک اپراتور اسکالر و دومی یک اپراتور برداری است.

$$\nabla\varphi . \nabla = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\nabla . \nabla \vec{A} = \nabla^2 \vec{A}$ $\qquad$ $\nabla\nabla \vec{A} = \nabla\nabla\vec{A}$ کار نداریم

$\nabla \times \nabla \vec{A} = \nabla \times \nabla \vec{A}$ کار نداریم $\rightarrow$ در دستگاه دکارتی حاصل این عبارت صفر است.

$\nabla \times \nabla \times \vec{A} =$ کرل کرل $\vec{A}$ $\qquad$ $\nabla . \nabla . \vec{A} =$ بی معنی

$\nabla . \nabla \times \vec{A} = \nabla . (\nabla \times \vec{A}) =$ دیورژانس کرل $\vec{A}$

$\nabla \nabla . \vec{A} =$ گرادیان دیورژانس $\vec{A}$ $\qquad$ $\nabla \times \nabla . \vec{A} = (\nabla \times \nabla) . \vec{A}$

$(\nabla \times \vec{A}) \times \nabla \rightarrow$ اپراتور برداری $\qquad$ $(\nabla . \vec{A})\nabla \rightarrow$ اپراتور اسکالر ؟

$(\vec{A} \times \nabla) \times \nabla \rightarrow$ " برداری $\qquad$ $(\nabla \times \vec{A}) . \nabla \rightarrow$ " اسکالر

$\vec{A}(\nabla \times \nabla) \rightarrow$ " اسکالر ؟ $\qquad$ $\nabla(\vec{A} . \nabla) \rightarrow$ " برداری

نکته: $\nabla \rightarrow$ اپراتور برداری $\qquad$ $\nabla . \nabla = \nabla^2 \rightarrow$ اپراتور اسکالر

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \, \hat{e}_x + \nabla^2 A_y \, \hat{e}_y + \nabla^2 A_z \, \hat{e}_z$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla . \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \longrightarrow$ میدان چرخش یک سیم لوله ای است.

$$(\nabla\times\nabla)\cdot\vec{A} = \left(\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j)\hat{e}_k\right)\cdot\left(\sum_{l}A_l\hat{e}_l\right) =$$

$$= \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j)A_k =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j)A_k + \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j)A_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j)A_k + \sum_{ijk}\varepsilon_{jik}(\partial_j\partial_i)A_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j)A_k - \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_j\partial_i)A_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j A_k - \partial_j\partial_i A_k)\right\} = 0$$

$$A\times(\nabla\times B) = \nabla(A\cdot\overset{\downarrow}{B}) - (A\cdot\nabla)B$$ ادامه:

$$B\times(\nabla\times A) = \nabla(\overset{\downarrow}{A}\cdot B) - (B\cdot\nabla)A$$

$$\nabla(A\cdot B) = A\times(\nabla\times B) + (A\cdot\nabla)B + B\times(\nabla\times A) + (B\cdot\nabla)A$$

$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \qquad \nabla\times\vec{B} \neq 0 \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = 0$

$$\nabla\cdot\vec{j} = 0$$

چگالی جریان

$\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hat{\vec{L}}$ بردار اپراتور $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ بردار

انتگرال گیری برداری: در بحث انتگرال گیری برداری با سه نوع انتگرال خطی، سطحی و حجمی سروکار داریم. طبق آنچه که می‌دانیم، عنصر طول یک کمیت برداری است که آن را با $\vec{dl}$ یا $\vec{dr}$ نمایش می‌دهیم. عنصر سطح نیز یک کمیت برداری است که آن را با نمادهای $\vec{ds}$ یا $\vec{dA}$ یا $\hat{n}\,da$ نمایش می‌دهیم. عنصر حجم را یک کمیت اسکالر می‌دانیم و آن را با نمادهای dv، $d\tau$، d^3r، $d^3\vec{r}$ و $d^4\vec{r}$ نمایش می‌دهیم.

حال می‌خواهیم با داشتن ماهیت این موجودات و در اختیار داشتن دو تابع اسکالر و برداری φ و $\vec{A}$ حالت های مختلف را بررسی کنیم.

الف) انتگرال خطی:

$\int_C \vec{A}\times\vec{dl}$ بردار — $\int_C \vec{A}\cdot\vec{dl}$ اسکالر — $\int_C \varphi\,\vec{dl}$ بردار

مثال: $\int_C \vec{F}\cdot\vec{dr}$

ب) انتگرال سطحی:

$\int_S \vec{A}\times\vec{ds}$ بردار — $\int_S \vec{A}\cdot\vec{ds}$ اسکالر — $\int_S \varphi\,\vec{ds}$ بردار

مثال: $\int_S \vec{B}\cdot\vec{ds}$ $\int_S \vec{E}\cdot\vec{ds}$

انتگرال شار

ج) انتگرال حجمی:

$\int_V \vec{A}\,dv$ بردار — $\int_V \varphi\,dv$ اسکالر

مثال: $\int_V \rho\,dv$

در دستگاه دکارتی:

$$\vec{dl} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

$$\vec{ds} = dy\,dz\,\hat{i} + dz\,dx\,\hat{j} + dx\,dy\,\hat{k}$$

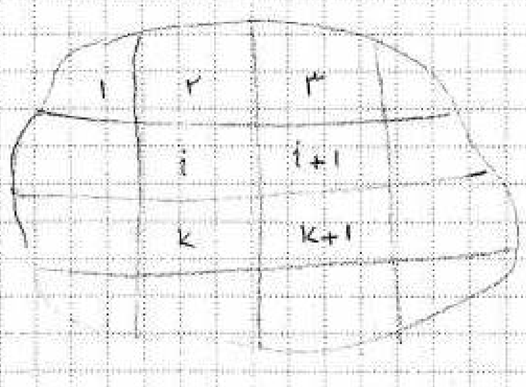
$$dv = dx\,dy\,dz$$

قضیه دیورژانس:

$$\int_v (\nabla\cdot\vec{A})\,dv = \oint_s \vec{A}\cdot\hat{n}\,da$$

توضیح قضیه: ناحیه‌ای به حجم v در نظر می‌گیریم که توسط سطح S محدود شده است. این ناحیه را به قطعات کوچکتری تقسیم می‌کنیم. بصورت زیر. این تقسیم بندی به گونه‌ای است که حول هر نقطه دلخواه یک عنصر حجم قرار گرفته باشد.

$$(\nabla\cdot\vec{A})_i\,\Delta v_i = \oint_{s_i} \vec{A}\cdot\hat{n}_i\,da$$



i ← شماره عنصر حجم مورد نظر.

Δv_i ← اندازه عنصر حجم i ام.

s_i ← سطح بسته در بر گیرنده عنصر حجم i ام.

تعداد عنصرهای حجم

$$\sum_{i=1}^{N} (\nabla\cdot\vec{A})_i\,\Delta v_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{s_i} \vec{A}\cdot\hat{n}_i\,da$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (\nabla\cdot\vec{A})_i\,\Delta v_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \oint_{s_i} \vec{A}\cdot\hat{n}_i\,da$$

$\Delta v_i \to 0$

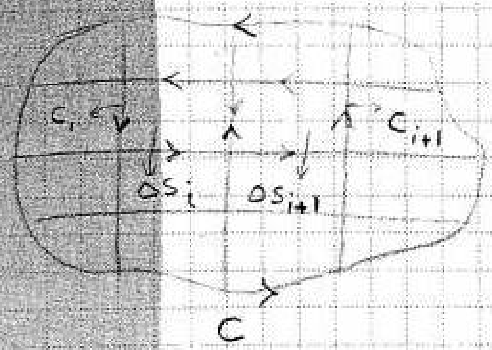
$$\int_v (\nabla\cdot\vec{A})\,dv = \oint_s \vec{A}\cdot\hat{n}\,da$$

نکته: $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f_i \Delta x_i = \int f(x)\,dx$

قضیه استوکس:

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,da = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

توجیه قضیه: سطح باز که توسط مسیر بسته C محصور شده است را در نظر می گیریم. این سطح را به قطعات بسیار کوچکی تقسیم می کنیم، کوچک به اندازه ای که هر کدام از این قطعات حول یک نقطه باشد.



طبق تعریف کرل:

$$(\nabla\times\vec{A})_i\,\Delta S_i = \oint_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(\nabla\times\vec{A})_i\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{N}\oint_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}_i$$

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta S_i\to 0}}\sum_{i=1}^{N}(\nabla\times\vec{A})_i\,\Delta S_i = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta S_i\to 0}}\sum_{i=1}^{N}\oint_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{l}_i$$

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,da = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$\vec{V}=\vec{v}(t)$ تابع سرعت

$\vec{E}=\vec{E}(\vec{r},t)$ تابع برداری — میدان برداری — میدان الکتریکی

متغیر مستقل		متغیر وابسته
اسکالر	$\longrightarrow$	بردار
بردار	$\longrightarrow$	بردار
		$\downarrow$ میدان برداری

$\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},t)$ $\longrightarrow$ در شاره ها میدان سرعت

صورت‌های دیگر این قضیه :

الف) فرض : $\vec{A} = \varphi \vec{a}$ $*$

$\vec{a}$ ← یک بردار ثابت دلخواه و غیر صفر

φ ← یک تابع اسکالر دلخواه $\vec{A}$ ← تابع برداری

$$1)\ \int_v (\nabla\cdot\vec{A})\,dv \overset{*}{=} \int_v \nabla\cdot(\varphi\vec{a})\,dv = \int_v \nabla\varphi\cdot\vec{a} + \underline{\varphi\,\cancel{\nabla\cdot\vec{a}}}\ dv =$$

به دلیل اینکه $\vec{a}$ یک بردار ثابت می‌باشد این جمله صفر است.

$$= \int_v (\nabla\varphi\cdot\vec{a})\,dv = \vec{a}\cdot\int_v \nabla\varphi\,dv$$

از سوی دیگر ← $\oint_s \vec{A}\cdot\hat{n}\,da \overset{*}{=} \oint_s (\varphi\vec{a})\cdot\hat{n}\,da = \vec{a}\cdot\oint_s \varphi\,\hat{n}\,da$

چون $\vec{a}$ یک بردار ثابت است آن را به همراه نقطه (.) بیرون می‌کشیم.

چون طرف چپ دو عبارت بالا مساوی یکدیگر اند داریم :

$$\vec{a}\cdot\int_v \nabla\varphi\,dv = \vec{a}\cdot\oint_s \varphi\,\hat{n}\,da \longrightarrow \vec{a}\cdot\left[\int_v \nabla\varphi\,dv - \oint_s \varphi\,\hat{n}\,da\right] = 0$$

با توجه به ثابت، دلخواه و غیر صفر بودن $\vec{a}$:

$$\int_v \nabla\varphi\,dv = \oint_s \varphi\,\hat{n}\,da$$ صورت دیگر قضیه دیورژانس

$$2)\ \int_s (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,da \overset{*}{=} \int_s \left(\nabla\times(\varphi\vec{a})\right)\cdot\hat{n}\,da = \int_s (\nabla\varphi\times\vec{a} + \underline{\cancel{\varphi\nabla\times\vec{a}}})\cdot\hat{n}\,da$$

به دلیل اینکه $\vec{a}$ یک بردار ثابت می‌باشد این جمله صفر است.

$$= \int_s (\nabla\varphi \times \vec{a}) \cdot \hat{n}\, da = -\int_s (\vec{a} \times \nabla\varphi) \cdot \hat{n}\, da = -\int_s \vec{a} \cdot (\nabla\varphi \times \hat{n})\, da =$$

$$= -\vec{a} \cdot \int_s (\nabla\varphi \times \hat{n})\, da = \vec{a} \cdot \int_s (\hat{n} \times \nabla\varphi)\, da$$

$$\oint_c \vec{A} \cdot \vec{dl} \overset{*}{=} \oint_c (\varphi \vec{a}) \cdot \vec{dl} = \vec{a} \cdot \oint_c \varphi\, \vec{dl}$$

چون طرف چپ دو عبارت بالا مساوی یکدیگر اند داریم:

$$\vec{a} \cdot \int_s (\hat{n} \times \nabla\varphi)\, da = \vec{a} \cdot \oint_c \varphi\, \vec{dl} \longrightarrow \int_s (\hat{n} \times \nabla\varphi)\, da = \oint_c \varphi\, \vec{dl}$$

صورت دیگر قضیه استوکس

ب) فرض: $\vec{A} = \vec{a} \times \vec{P}$ *

$\vec{A}$: تابع برداری.

$\vec{a}$: یک بردار ثابت، دلخواه و غیر صفر

$\vec{P}$: یک تابع برداری دلخواه و غیر ثابت.

$$1)\ \int_v (\nabla \cdot \vec{A})\, dv \overset{*}{=} \int_v (\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{P}))\, dv = \int_v \underbrace{\cancel{(\nabla \times \vec{a})} \cdot \vec{P}}\ - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{P})\ dv =$$

چون $\vec{a}$ یک بردار ثابت می باشد این جمله صفر است.

$$= -\int_v \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{P})\, dv = -\vec{a} \cdot \int_v (\nabla \times \vec{P})\, dv$$

از سوی دیگر $\longrightarrow \oint_s \vec{A} \cdot \hat{n}\, da \overset{*}{=} \oint_s (\vec{a} \times \vec{P}) \cdot \hat{n}\, da = \oint_s \vec{a} \cdot (\vec{P} \times \hat{n})\, da =$

$$= \vec{a} \cdot \oint_s (\vec{P} \times \hat{n})\, da = -\vec{a} \cdot \oint_s (\hat{n} \times \vec{P})\, da$$

چون طرف چپ دو عبارت بالا مساوی یکدیگر اند داریم:

$$\vec{a}\cdot\left[\int_v (\nabla\times\vec{P})\,dv - \oint_s (\hat{n}\times\vec{P})\,da\right] = 0$$

با توجه به ثابت، دلخواه و غیرصفر بودن بردار $\vec{a}$:

$$\int_v (\nabla\times\vec{P})\,dv = \oint_s (\hat{n}\times\vec{P})\,da$$ صورت دیگر قضیه دیورژانس

$$۲)\ \int_s (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,da \overset{*}{=} \int_s (\nabla\times(\vec{a}\times\vec{P}))\cdot\hat{n}\,da =$$

$$= \int_s \underline{(\vec{P}\cdot\nabla)\vec{a}} - \underline{(\nabla\cdot\vec{a})\vec{P}} + (\nabla\cdot\vec{P})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{P}\ \cdot\hat{n}\,da =$$

به دلیل اینکه $\vec{a}$ یک بردار ثابت و دلخواه و غیرصفری باشد
این دو جمله صفر اند.

$$= \int_s \left[(\nabla\cdot\vec{P})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{P}\right]\cdot\hat{n}\,da = \int_s \left[(\nabla\cdot\vec{P})(\vec{a}\cdot\hat{n}) - (\vec{a}\cdot\nabla)(\vec{P}\cdot\hat{n})\right]da$$

$$= \int_s \vec{a}\cdot\left[(\nabla\cdot\vec{P})\hat{n} - \nabla(\vec{P}\cdot\hat{n})\right]da = \int_s \vec{a}\cdot(-(\hat{n}\times\nabla)\times\vec{P})\,da =$$

$$-(\hat{n}\times\nabla)\times\vec{P}$$

$$= -a\cdot\int_s (\hat{n}\times\nabla)\times\vec{P}\ \ da$$

از سوی دیگر $\longrightarrow \oint_c \vec{A}\cdot\vec{dl} \overset{*}{=} \oint_c (\vec{a}\times\vec{P})\cdot\vec{dl} = \oint_c \vec{a}\cdot(\vec{P}\times\vec{dl}) =$

$$= \vec{a}\cdot\oint_c \vec{P}\times\vec{dl} = -\vec{a}\cdot\oint_c \vec{dl}\times\vec{P}$$

چون طرف چپ دو عبارت بالا مساوی یکدیگرند داریم:

$$\vec{a}\cdot\left[\int_S (\hat{n}\times\nabla)\times\vec{P}\,da - \oint_C d\vec{l}\times\vec{P}\right] = 0 \rightarrow$$

$$\int_S (\hat{n}\times\nabla)\times\vec{P}\,da = \oint_C d\vec{l}\times\vec{P}$$ صورت دیگر قضیه استوکس

اتحاد گرین: فرض کنید u و v دو تابع اسکالر باشند:

$u = u(x,y,z) \qquad v = v(x,y,z)$

می‌دانیم: $\nabla\cdot(u\nabla v) = \nabla u\cdot\nabla v + u\nabla^2 v$

از طرفین عبارت فوق روی حجم دلخواه V انتگرال می‌گیریم:

$$\int_V \nabla\cdot(u\nabla v)\,d\tau = \int_V \nabla u\cdot\nabla v\,d\tau + \int_V u\nabla^2 v\,d\tau$$

$$\oint_S u\nabla v\cdot\hat{n}\,da = \int_V \nabla u\cdot\nabla v\,d\tau + \int_V u\nabla^2 v\,d\tau$$ اتحاد اول گرین

می‌دانیم $\rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot(u\nabla v) = \nabla u\cdot\nabla v + u\nabla^2 v \\ \nabla\cdot(v\nabla u) = \nabla u\cdot\nabla v + v\nabla^2 u \end{cases}$

روزبزرگداشت شیخ صدوق

$$\nabla\cdot(u\nabla v) - \nabla\cdot(v\nabla u) = u\nabla^2 v - v\nabla^2 u$$

$$\int_V \nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u)\,d\tau = \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,d\tau$$

$$\oint_S (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\hat{n}\,da = \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,d\tau$$

اتحاد دوم گرین.

مثال: پتانسیل اسکالر الکترواستاتیکی

فرض: $u = v = \varphi$

$$\oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot\hat{n}\,da = \int_V \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\,d\tau + \int_V \varphi\nabla^2\varphi\,d\tau$$

اگر در ناحیه مورد نظر که دارای حجم v است، هیچ توزیع باری نداشته باشیم:

$$\rightarrow \nabla^2\varphi = 0 \longrightarrow \oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot\hat{n}\,da = \int_V |\nabla\varphi|^2\,d\tau$$

ناحیه‌ای به حجم v

که مرز ناحیه

می‌دانیم $\rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi$

$$\int_V |\vec{E}|^2\,d\tau = \oint_S \varphi\underbrace{\nabla\varphi\cdot\hat{n}}\,da = -\oint_S \varphi(\vec{E}\cdot\hat{n})\,da$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\vec{E}\cdot\hat{n} = -E_n$$

اتحاد دوم: $$\oint_S (\varphi\nabla\varphi - (\nabla\varphi)\varphi)\cdot\hat{n}\,da = \int_V (\varphi\nabla^2\varphi - (\nabla^2\varphi)\varphi)\,d\tau$$

$$0 = 0 \longrightarrow$$

نشان می‌دهد که اتحاد دوم برقرار است ولی به نتیجه خاصی نمی‌رسیم.

مثال : $u = \varphi \qquad v = \frac{1}{r}$

(اتحاد دوم) : $\oint_s \left(\varphi \nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla\varphi\right)\cdot \hat{n}\, da = \int_v \left(\varphi \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\right) d\tau$ (1)

بعدها خواهیم دید $\rightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ (2)

$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{r})$ (3)

تابع دلتای دیراک

$\xrightarrow{1,2,3} \oint_s \left(\varphi\nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla\varphi\right)\cdot\hat{n}\,da =$

$$= -4\pi \underbrace{\int_v \varphi\,\delta(\vec{r})\,d\tau}_{\varphi(0)} + \int_v \frac{1}{r}\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\,d\tau$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho(r)}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\oint_s \left[\frac{1}{r}\nabla\varphi\cdot\hat{n} - \varphi\left(\frac{-\vec{r}}{r^3}\right)\cdot\hat{n}\right] da$$

در حالت کلی $\rightarrow$ $$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\oint_s \left[\frac{\nabla\varphi\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\varphi\right] da \quad *$$

* اگر $u = \varphi$ و $v = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ بود، مستقیماً به رابطه * می‌رسیدیم.

تعریف برحسب انتگرالهای برداری گرادیان، دیورژانس و کرل.

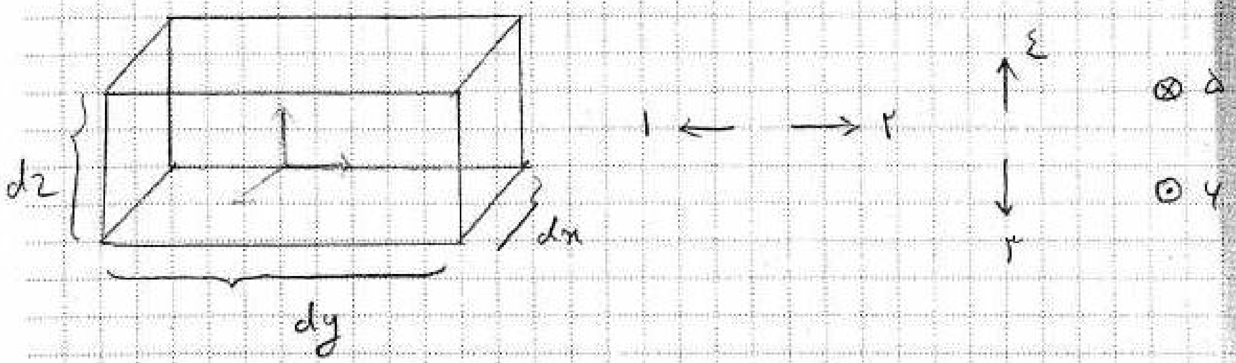
گرادیان :

$$\nabla\varphi = \lim_{\int_v d\tau \to 0} \frac{\oint_s \varphi\, \hat{n}\, da}{\int_v d\tau} \quad *$$

فرض: یک عنصر حجم در نظر می‌گیریم که مبدأ مختصات در مرکز آن باشد.

$$d\tau = dx\, dy\, dz$$

فرض: مقدار تابع φ در مرکز عنصر حجم معلوم باشد $\varphi = \varphi(x,y,z)$. دو فرض بیان شده را بر تعریف * اعمال می‌کنیم.



$$\varphi_1 = \varphi_0 + \left(-\frac{dy}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \text{جملات بالاتر} \ldots$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \left(\frac{dy}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \ldots$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 + \left(-\frac{dz}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \ldots \qquad \varphi_4 = \varphi_0 + \left(\frac{dz}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \ldots$$

$$\varphi_5 = \varphi_0 + \left(-\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \ldots \qquad \varphi_6 = \varphi_0 + \left(\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \ldots$$

$\oint_s \varphi \hat{n}\, da =$ چون عنصر حجم دیفرانسیلی است انتگرالده را جایگزین انتگرال می‌کنیم.

$= \varphi_1(-\hat{j})\, dz\, dx + \varphi_2(\hat{j})\, dz\, dx + \varphi_3(-\hat{k})\, dx\, dy + \varphi_4(\hat{k})\, dx\, dy +$

$+ \varphi_5(-\hat{i})\, dy\, dz + \varphi_6(\hat{i})\, dy\, dz$ (۲)

$$\xrightarrow{1,2} \oint_s \varphi \hat{n}\, da = \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\, dx\, dz\, \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz\, dx\, dy\, \hat{k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\, dy\, dz\, \hat{i}$$

$$\oint_s \varphi \hat{n}\, da = \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right)}_{\nabla \varphi} \underbrace{dx\, dy\, dz}_{\int_v d\tau}$$

تعریف پتانسیل:

می‌دانیم $\begin{cases} \nabla \times \nabla \varphi = 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \end{cases}$

هنگام بررسی میدانهای برداری با میدانهایی مواجه می‌شویم که دیورژانس یا کرل آنها صفر می‌باشد. (و یا هر دو صفر هستند.) از آنجایی که میدانها موجودات پیچیده‌ای هستند، در چنین شرایطی به کمک دو اتحاد بالا می‌توان از موجودات جایگزین استفاده نمود، که سبب سهولت کار می‌شود. تحت این شرایط به این موجودات

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{-\vec{r}}{r^3}\right)$$

جدید نام پتانسیل داده می‌شود. φ را پتانسیل اسکالر و $\vec{A}$ را پتانسیل برداری می‌گوییم.

مثال: می‌دانیم: $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e}_r = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$

انرژی پتانسیل گرانشی $U_G = -G\frac{m_1 m_2}{r} \rightarrow$ شدت میدان گرانشی $\vec{g} = -G\frac{m_2}{r^3}\vec{r}$

پتانسیل گرانشی $\varphi_G = -G\frac{m_2}{r}$

پتانسیل گرانشی برابر است با انرژی پتانسیل گرانشی واحد جرم: $\varphi_G = \frac{U_G}{m_1}$

$-\nabla\varphi_G = \vec{g}$ $\qquad -\nabla U_G = \vec{F}_G$

صورت مسئله:

می‌دانیم $\begin{cases} \nabla\times(\nabla\varphi) = 0 & 1 \\ \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 & 2 \end{cases}$

میدان برداری $\vec{E}$ مفروض است، به گونه‌ای که $\nabla\times\vec{E} = 0$ است. با توجه به اینکه کرل

گرادیان صفر است، انتظار داریم $\vec{E} = C\nabla\varphi$ باشد. مطلوب است تعیین φ.

ثابت C

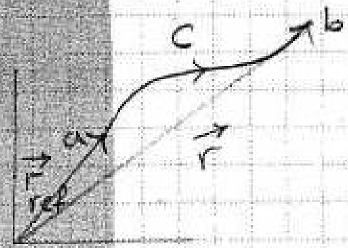
صورت مسئله: $\vec{E}$, $\nabla\times\vec{E} = 0 \xrightarrow{1} \vec{E} = C\nabla\varphi$

حل مسئله $\to \vec{E} = C\nabla\varphi \to \vec{E}\cdot d\vec{r} = C\nabla\varphi\cdot d\vec{r}$

$$\int_{c_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = C\int_{c_1} \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = C\int_{c_1} d\varphi$$

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = C\int_a^b d\varphi = C\varphi\Big|_a^b \longrightarrow \varphi_b - \varphi_a = \frac{1}{C}\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \text{③}$$

رابطه ۳ اختلاف φ را به ما می‌دهد. جهت بدست آوردن φ به ناچار باید بصورت زیر عمل نماییم.



قرارداد: $\begin{cases} a = \vec{r}_{ref} \to \text{مرجع} \\ b = \vec{r} \end{cases}$

$$\longrightarrow \varphi_a = \varphi(\vec{r}_{ref}) = 0 \quad , \quad \varphi_b = \varphi(\vec{r}) \neq 0 \quad \text{④}$$

$$\xrightarrow{۳و۴} \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{C}\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$ پتانسیل اسکالر $\varphi(\vec{r})$

یادداشت ۱: این نحوه پیدا کردن $\varphi(\vec{r})$ ممکن است خیلی دستی و مصنوعی به نظر

برسد. اما از آنجایی که در بحث های فیزیکی مربوطه این توابع برداری $\vec{E}$ و مانند آن دارای اهمیت فیزیکی هستند این روش اشکالی ندارد.

$\vec{g} = -\nabla\varphi_G$ φ_G ، $\varphi'_G = \varphi_G +$ ثابت

یادداشت ۲: اگر $\vec{E}$ نمایانگر میدان الکتریکی یا میدان گرانشی باشد، ضریب c را برابر ۱- می‌گیریم. ($c = -1$) علت این انتخاب ملاحظات فیزیکی می‌باشد.

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$ (هماهنگی نظریه با تجربه)

$$\varphi_G(\vec{r}) = \Phi_G(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{g}\cdot d\vec{l}$$

تعبیر فیزیکی: این علامت منفی به این دلیل است که آب آبشار به پایین بریزد.

صورت مسئله: میدان برداری دلخواه $\vec{B}$ مفروض است، به گونه‌ای که $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ باشد. با توجه به اتحاد ۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\underset{\text{ثابت}}{\vec{B} = c'\nabla\times\vec{A}}$$

مطلوب است تعیین $\vec{A}$ ← پتانسیل برداری

مجهولات مسئله: A_x , A_y , A_z $\quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

$$B_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \quad B_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \quad B_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

فرض: $A_z = 0$ ؟

$$\vec{B} = B_x(x,y,z)\,\hat{i} + B_y(x,y,z)\,\hat{j} + B_z(x,y,z)\,\hat{k}$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$$

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z} \quad \text{۷} \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} \quad \text{۸} \qquad B_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \quad \text{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{۷}} \int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)\,dz = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial z}\,dz = -\left(A_y(x,y,z) - A_y(x,y,z_0)\right)$$

$$A_y(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)\,dz + A_y(x,y,z_0) \qquad \text{۱۰}$$

$$A_x(x,y,z) = +\int_{z_0}^{z} B_y(x,y,z)\,dz + A_x(x,y,z_0) \qquad \text{۱۱}$$

$$\xrightarrow{\text{۹، ۱۰، ۱۱}} B_z = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_x}{\partial x}\,dz + \frac{\partial A_y(x,y,z_0)}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_y}{\partial y}\,dz - \frac{\partial A_x(x,y,z_0)}{\partial y}$$

$$B_z = -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial A_y(x,y,z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z_0)}{\partial y} \qquad \text{۱۲}$$

حال می‌خواهیم از شرط $\nabla\cdot\vec{B}=0$ استفاده کنیم.

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad \text{۱۳}$$

$$\xrightarrow{\text{۱۲، ۱۳}} B_z(x,y,z) = \underbrace{\int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_z}{\partial z}\,dz}_{} + \frac{\partial A_y(x,y,z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z_0)}{\partial y}$$

$$\cancel{B_z(x,y,z)} = \underbrace{\cancel{B_z(x,y,z)} - B_z(x,y,z_0)} + \frac{\partial A_y(x,y,z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z_0)}{\partial y}$$

$$B_z(x,y,z_0) = \frac{\partial A_y(x,y,z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z_0)}{\partial y}$$

فرض : $A_x(x,y,z_0) = 0$ ۱۴

$$A_y(x,y,z_0) = \int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)\,dx + A_y(x_0,y,z_0) \qquad 15$$

$$\xrightarrow[14,\,15]{10,\,11} \quad A_x(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,z)\,dz + 0$$

$$A_y(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)\,dz + \int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)\,dx + \underbrace{A_y(x_0,y,z_0)}_{h(y)}$$

با اعمال دو فرض ۷ و ۱۴، مولفه های پتانسیل برداری $\vec{A}$ را بدست آوردیم. در ظاهر این روش مصنوعی به نظر می رسد و توجیهی برای دو فرض ۷ و ۱۴ نداریم. اما به کمک قضیه یکتایی که بعدها با آن آشنا می شویم، این فرض ها توجیه پذیرند. چرا که طبق آن قضیه شرایطی که تحت آن یک بردار را می توان به طور یکتا معین نمود، بیان شده است.

$\vec{A}$ ← $\nabla\times\vec{A}$ معلوم باشد. $\nabla\cdot\vec{A}$ معلوم باشد.

$\vec{A}\cdot\hat{n}$ مولفه نرمال $\vec{A}$ روی مرز ناحیه مورد نظر باید معلوم باشد.

$\Downarrow$

$\vec{A}$ به طور یکتا تعیین می‌شود.

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\vec{A}=0$$

۴ مولفه $(\varphi, \vec{A})$ ← ۶ مولفه $(\vec{E}, \vec{B})$

پتانسیل

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} \qquad \nabla\times\vec{A}=\frac{1}{2}\nabla\times(\vec{B}\times\vec{r}) =$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cancel{(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{B}} - \cancel{(\nabla\cdot\vec{B})}\vec{r} + \underbrace{(\nabla\cdot\vec{r})\vec{B}}_{3\vec{B}} - \underbrace{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{r}}_{\vec{B}}\right\} = \vec{B}$$

اگر $\vec{B}$ ثابت باشد.

قانون گاوس: $\oint_s \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \frac{q}{\epsilon_0}$ (1) مینویسیم باید که

برای یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r^3}\vec{r} =$$

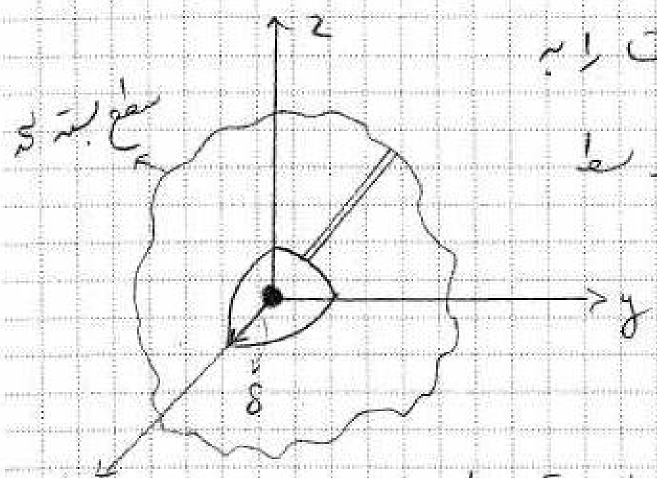
$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\hat{e}_r \quad (2) \qquad \hat{e}_r=\frac{\vec{r}}{r}$$

$$1,2 \to \frac{\cancel{q}}{4\pi\cancel{\epsilon_0}}\oint_s \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, da = \frac{\cancel{q}}{\cancel{\epsilon_0}} \to \frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, da = 1$$

$\to \oint_s \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, da = 4\pi$ * $\to$ به شرطی که سطح بسته که مبدأ را شامل شود. (یعنی بار q داخل سطح بسته باشد.)

$\oint_s \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, da = 0$ * $\leftarrow$ اگر سطح بسته که مبدأ را شامل نشود. یعنی $q=0$ (یعنی بار q داخل سطح بسته نباشد.)

* صورتهای ریاضی قانون گاوس



برای اثبات این قانون، حول مبدأ مختصات را به اندازه یک کره به شعاع δ خالی می کنیم و توسط یک شیار باریک، سطح S را به سطح کره به شعاع δ وصل می کنیم. با این کار حجمی که از خارج توسط سطح S و از داخل توسط سطح کره محدود می شود، یک ناحیه همبند ساده تشکیل می دهند.

سطح بسته جدید: $S' = S +$ سطح کره $+$ سطح جانبی شیار

$\underline{1}\ \oint_{S'} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, da = 0 \leftarrow$ چون که مرز ناحیه ای است که شامل مبدأ نیست.

$$\oint_{s'} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}\,da = \int_v \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dv = 0$$

قضیه دیورژانس

چون ناحیه به حجم v مبدأ را شامل نمی‌شود.

$$\rightarrow \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

$$\underline{2}\ \oint_{s'} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}\,da = \int_s \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}_1\,da + \int_{\text{سطح کره}} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}_2\,da + \int_{\text{سطح جانبی شیار}} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}_3\,da = 0$$

$$\hat{n}_2 = -\hat{e}_r$$

*

* شیاری که زده شد، جهت اتصال دو سطح S و سطح کره،

شیار باریک فرض می‌کنیم. $* = 0$

تحت این شرایط مقدار $\frac{\vec{r}}{r^3}$ بر روی سطح جانبی شیار قابل اغماض است و

با توجه به اینکه نرمال به سطح نیمه‌ای از شیار منفی نرمال به سطح نیمه دیگر است

حاصل انتگرال سوم صفر است.

$$\int_s \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}_1\,da = \int_{\text{سطح کره}} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{e}_r\,da = \int_{\text{سطح کره}} \frac{da}{r^2} = \int_{\text{سطح کره}} d\Omega$$

$$d\Omega = \frac{da}{r^2}$$

زاویه فضایی جزئی

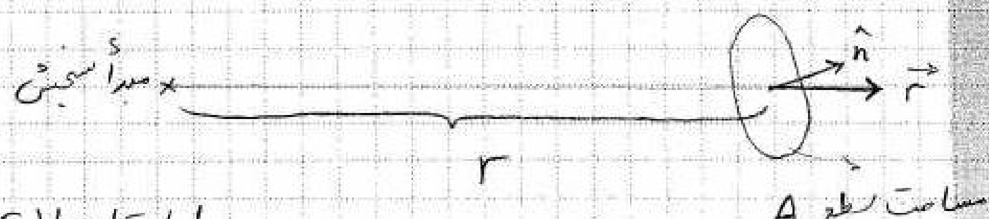
نتیجه: $\int_s \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}_1\, da = \int_{\text{سطح کره}} \frac{da}{r^2} = \int_{\text{سطح کره}} \frac{da}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2}\int_{\text{سطح کره}} da =$

$$= \frac{1}{\cancel{\delta^2}}(4\pi\cancel{\delta^2}) = 4\pi \longrightarrow \oint_s \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}_1\, da = 4\pi$$

چون شعاع خیلی باریک است.

تعریف: زاویه فضایی = $\dfrac{\text{مساحت}}{\text{مربع فاصله عمودی از سطح}}$ $\longrightarrow \Omega = \frac{\vec{r}\cdot\vec{A}}{r^3}$

$\vec{A} = A\hat{n}$



۱ استرادیان = واحد

$$d\Omega = \frac{\vec{r}\cdot\hat{n}\, da}{r^3}$$

قانون گاوس:

$$\oint_s \vec{E}\cdot\hat{n}\, da = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_0} & \text{* بار } q \text{ داخل } S \\ 0 & \text{بار } q \text{ خارج } S \end{cases} \longrightarrow \int_V \nabla\cdot\vec{E}\, dv = 0$$

می‌دانیم $\int_V \rho\, dv = q$!

$\int_s \vec{A}\cdot d\vec{s} =$ شار میدان $\vec{A}$

$\xrightarrow[\text{قضیه دیورژانس}]{1} \int_v \nabla\cdot\vec{E}\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho\, dv \longrightarrow \int_v \left[\nabla\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right] dv = 0$

چون ناحیه انتگرال گیری v دلخواه است. $\longrightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\underline{2}$

معادله اول ماکسول (فرم دیفرانسیلی قانون گاوس)

نتیجه $\longrightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ 0 \end{cases}$

در الکتروستاتیک : میدان $\vec{E} = -\nabla\varphi \xrightarrow{2} \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ معادله پواسون

(در فرآیندهای مستقل از زمان)

معادله لاپلاس $\nabla^2\varphi = 0 \longrightarrow$ اگر $\rho = 0$

$\oint_s \vec{B}\cdot\hat{n}\, da = 0 \xrightarrow[\text{دیورژانس}]{\text{ق}} \int_v \nabla\cdot\vec{B}\, dv = 0 \xrightarrow[\text{دلخواه}]{\text{حجم } v} \nabla\cdot\vec{B} = 0$

قانون گاوس (معادله دوم از معادلات ماکسول)

$\begin{cases} \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \\ \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \end{cases}$

* حاصل این دو عبارت برای همه نقاط فضا به جز در مبدأ صفر است.

فیزیک پایه تا $\longrightarrow$ توزیع بار : $\begin{cases} \text{گسسته} \quad q \\ \text{پیوسته} \quad \rho(\vec{r}),\ \sigma(\vec{r}),\ \lambda(\vec{r}) \end{cases}$

به کمک تابع دلتا $\longrightarrow$ توزیع بار $\rho(\vec{r})$

تابع دلتای دیراک

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,dx = 1 & x = x_0 \end{cases}$$

خواص : $\underline{1}$ $\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$, $\delta(x) = \delta(-x)$ تابع زوج است.

$\underline{2}$ $\delta(cx) = c\,\delta(x)$ $\quad \underline{3}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$

$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$ $\quad \underline{4}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f'(x_0)$

تابع دلتای دیراک دو بعدی :

$$\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \neq x_0 \text{ یا } y \neq y_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,dx\,dy = 1 & \text{اگر } x = x_0 \text{ و } y = y_0 \end{cases}$$

تابع دلتای دیراک سه بعدی :

$$\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \neq x_0 \text{ یا } y \neq y_0 \text{ یا } z \neq z_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\,dx\,dy\,dz = 1 & \text{اگر } x = x_0 \text{ و } y = y_0 \text{ و } z = z_0 \end{cases}$$

تابع دلتای دیراک سه بعدی $\Rightarrow$ $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \begin{cases} 0 \\ \int_v \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, d^3\vec{r} = 1 \end{cases}$

با توجه به تعاریف بالا تابع دلتای دیراک سه بعدی در همه نقاط فضا صفر است به جز در یک نقطه و تابع دلتای دیراک دو بعدی در کلیه نقاط فضا صفر است به جز نقاط واقع بر روی خط $x=x_0$ و $y=y_0$ و در نهایت تابع دلتای دیراک یک بعدی در همه نقاط فضا صفر است به جز نقاط واقع بر روی صفحه $x=x_0$.

چگالی بار : $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r})$ $\quad \rho(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\,\delta(x)\,\delta(y)$

$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\,\delta(z)$

می‌دانیم $\rightarrow \oint_s \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho\, dv \xrightarrow{\text{ق دیورژانس}}$

$\int_v \nabla\cdot\vec{E}\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho\, dv \xrightarrow[\text{نقطه‌ای}]{\text{برای بار}} \xrightarrow{1\,,\,2}$

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dv = \frac{q}{\varepsilon_0}\int_v \delta(\vec{r})\, dv \longrightarrow \int_v \left[\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - 4\pi\,\delta(\vec{r})\right] dv = 0$

$\longrightarrow$ حجم v یک ناحیه دلخواه $\longrightarrow$ انتگرالده برابر صفر است. $\longrightarrow$

$\rightarrow \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi\,\delta(\vec{r}) \longrightarrow \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ ادامه

برای بار نقطه‌ای واقع در مبدأ:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

$$(2) \quad \rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}) \quad \text{و} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

اگر بار q در جایی غیر از مبدأ باشد.

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

ادامه

$$\longrightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right) = 4\pi\,\delta(\vec{r}) \longrightarrow \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\,\delta(\vec{r})$$

اگر بار q در جایی غیر از مبدأ باشد.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

قضیه یکتایی: صورت قضیه: اگر در ناحیه‌ای دلخواه از فضا به حجم V که توسط مرز S محدود شده است، بخواهیم بردار $\vec{A}$ را به طور یکتا معین نماییم، کافی است $\nabla \cdot \vec{A}$ و $\nabla \times \vec{A}$ را در کلیه نقاط ناحیه مورد نظر بدانیم و همچنین مولفه نرمال $\vec{A}$، $A_n = \vec{A} \cdot \hat{n}$، بر روی مرز در برگیرنده ناحیه مورد نظر معلوم باشد.

می‌خواهیم بردار $\vec{A}$ را به طور یکتا معین کنیم.

اگر $\nabla \cdot \vec{A}$ و $\nabla \times \vec{A}$ در ناحیه V معلوم و $A_n = \vec{A} \cdot \hat{n}$ روی مرز ناحیه V (بر روی S) معلوم باشد. اثبات قضیه: فرض خلف: فرض می‌کنیم که تحت شرایط بیان شده توسط قضیه به جای یک بردار، دو بردار $\vec{A}_1$ و $\vec{A}_2$ معین گردد به گونه‌ای که $\vec{W} = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$

در این صورت شرایط مرزی برای بردار $\vec{W}$ به صورت زیر است :

تحت شرایط یکسان $\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{A}_1 = \nabla\cdot\vec{A}_2$ معلوم $\qquad \nabla\cdot\vec{W} = 0$

$\nabla\times\vec{A}_1 = \nabla\times\vec{A}_2$ معلوم $\longrightarrow$ $\nabla\times\vec{W} = 0$

$A_{1n} = A_{2n}$ معلوم $\qquad W_n = 0$ روی مرز

در این فرض خلف ما فرض کردیم که دو بردار متفاوت وجود داشته باشند که در شرایط یکسانی صدق کنند. چون $\nabla\times\vec{W} = 0 \longrightarrow \vec{W} = \nabla\phi$ اسکالر

$\rightarrow \nabla\cdot\vec{W} = \nabla\cdot(\nabla\phi) \longrightarrow \nabla^2\phi = 0$ $\quad$ ۲ $\quad$ در سرتاسر ناحیه به حجم v

اتحاد اول گرین: $\oint_S u\nabla v\cdot\hat{n}\,da = \int_v \nabla u\cdot\nabla v\,dv + \int_v u\nabla^2 v\,dv$ $\quad$ ۱

در اینجا: $u = v = \phi \xrightarrow{1} \oint_S \phi\nabla\phi\cdot\hat{n}\,da = \int_v |\nabla\phi|^2 dv + \int_v \phi\cancel{\nabla^2\phi}\,dv$

بنابر رابطه ۲

داریم: $W_n = 0 \longrightarrow \vec{W}\cdot\hat{n} = 0 \longrightarrow \nabla\phi\cdot\hat{n} = 0$ $\quad$ ۳

$\longrightarrow \oint_S \phi(\nabla\phi\cdot\hat{n})\,da \underset{4}{=} \int_v |\nabla\phi|^2 dv \longrightarrow \int_v |\nabla\phi|^2 dv = 0$

اگر طرف چپ رابطه ۴ به واسطه صفر بودن ϕ صفر گردد، این شرط مرزی را دیریکله گوییم.

معلوم بودن