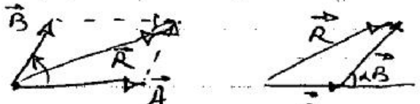
بردار

مشخصه‌ی اصلی بردار اندازه و جهت است.

(با دو جریان بردار حساب نمی‌کنند.)

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$



$\vec{R}.\vec{R} = (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})$

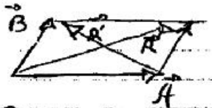
$R^2 = A^2 + B^2 + 2A.B$

$(1+\cos\alpha) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

1/ $|A-B| \leq R \leq A+B$!?

2/ if $A=B$ Then $R = 2A\cos\alpha/2$

3/ if $\alpha = 120$ Then $A=B=R$



$\vec{B} - \vec{A} = \vec{R}'$

$R'^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha$

$1-\cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2$

1/ $|A-B| \leq R' \leq A+B$!?

2/ $A=B \rightarrow R' = 2A\sin\alpha/2$

۱۶۰

$A^2 + A.B + B.A + B^2$

$2A.B$

$2i + 3j \rightarrow \sqrt{13}$

$3i + j \rightarrow \sqrt{10} \rightarrow 3$

$5i + 4j \rightarrow \sqrt{41} \rightarrow 7.5$

$R^2 = 2A^2 + 2A.A$

$R = 2A$

فیزیک پایه:

1. هالیدی
2. هالیرن (مسائل اضافی)
3. کلینر

۱- نیروهای جاذبه گرانش

تحلیلی:

۲- برخورد دو بعدی

۳- برخورد مرکزی

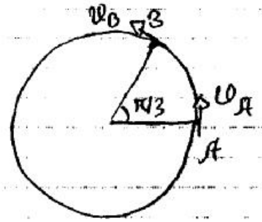
۴- نیروهای مرکزی

1. آریا
2. ماریون
3. فولز
4. سری شوم
5. سایمون

3/ اگر $A = B = R'$ Then $\alpha = \pi/3 = 60°$

4/ اگر $R = R'$ Then متوازی‌الاضلاع لوزی یا مستطیل است

مثال: ذره‌ای بر روی مسیر دایره به شعاع R حرکت دایره‌ای یکنواخت با سرعت v انجام می‌دهد. اندازه تغییر سرعت ذره از A تا B چقدر است؟



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$
$$= 2v_A \sin \pi/6$$
$$= 2v(1/2)$$
$$= v$$

ضرب بردارها

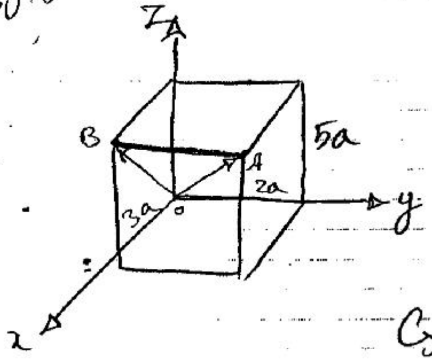
1) ضرب دوگانه
- الف) عدد در بردار
- ب) ضرب داخلی ← نتیجه یک عدد
- ج) ضرب خارجی

$$\alpha\vec{A} = \vec{B} \to \begin{cases} \alpha > 0 & \vec{A} \parallel \vec{B} \\ \alpha < 0 & \vec{A} \nparallel \vec{B} \end{cases}$$

$$A \cdot B = \begin{cases} A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ AB\cos\alpha \end{cases}$$

$A \perp B \to A \cdot B = 0 \quad (i\cdot j = i\cdot k = j\cdot k = 0)$

زاویه بین دو بردار $\quad \cos\alpha = \dfrac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$



مثال: زاویه بین دو بردار

$OA = (3a, 2a, 5a)$

$OB = (3a, 0, 5a)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|OA|\cdot|OB|}$$

مثال: ذره‌ای با سرعت $\vec{v}_0 = v_0\cos\theta\,\hat{i} + v_0\sin\theta\,\hat{j}$ از مبدأ جاذبه زمین با شتاب $\vec{a} = -g\hat{j}$ پرتاب می‌شود. زاویه بین بردارهای سرعت و شتاب این ذره در لحظه‌ی t کدام است؟

1) $\mathrm{Arctg}\dfrac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}$ 2) $\pi/2 - \mathrm{Arctg}\dfrac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}$

3) $\pi/2 + \mathrm{Arctg}\dfrac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}$ 4) $\pi/2$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \to \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_y = -gt + v_0\sin\theta \end{cases}$$

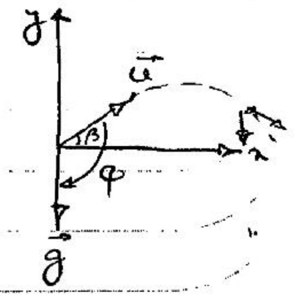
۵

α

$$tg\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\sin\theta - gt}{v_0\cos\theta}$$

$$\varphi = \pi/2 + \beta$$

$$\varphi = \pi/2 + \operatorname{Arctg}\frac{v_0\sin\theta - gt}{v_0\cos\theta}$$



این سوال دو جواب دارد. | ج ۲ | ۱۴

مثال: ذره‌ای روی صفحه‌ی xy دارای معادله حرکت مقابل می‌باشد

V, ۲۲

$x(t) = R(\omega t - \sin\omega t)$

$y(t) = R(1 - \cos\omega t)$

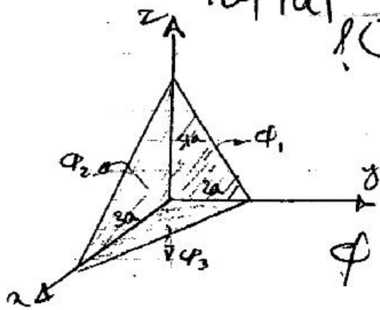
زاویه میان بردار سرعت و شتاب در $t=4s$ کدام است؟

$\dot x(t) = R(\omega - \omega\cos\omega t)$, $\dot y(t) = R\omega\sin\omega t$

$\ddot x(t) = R\omega^2\sin\omega t$, $\ddot y(t) = R\omega^2\cos\omega t$

$\cos\alpha = \frac{\vec v\cdot\vec a}{|v||a|} \to \alpha = 2\omega$

مثال: شار رد شده از صفحه چقدر است؟



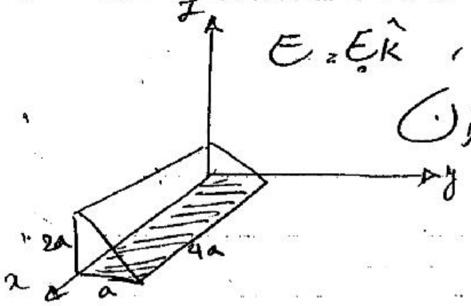
$E = E_0\hat i + 2E_0\hat j + 3E_0\hat k$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$

$$\varphi = E_0\left(\frac{4a\cdot2a}{2}\right) + 2E_0\left(\frac{3a\cdot4a}{2}\right) + 3E_0\left(\frac{2a\cdot3a}{2}\right)$$

۶ (ش)

α



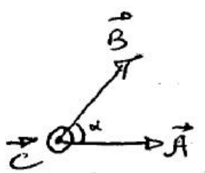
$E = E_0\hat k$, $\varphi = E\cdot A = E(A\cos\alpha)$

سطحی را در نظر بگیرید که بردار عمود بر آن در راستای میدان باشد.

ضرب خارجی

$\vec A\times\vec B = \vec C$

$$\vec C = \begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$



ولادت حضرت امام محمد باقر (ع)

$|\vec C| = AB\sin\alpha$

1/ $A\parallel B \to A\times B = 0$ $(\hat i\times\hat i = \hat j\times\hat j = \hat k\times\hat k = 0)$

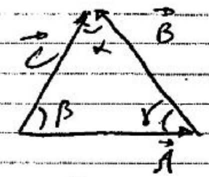
2/ $A\perp B \to |A\times B| = AB$

$\hat i\times\hat j = \hat k$, $\hat j\times\hat k = \hat i$, $\hat k\times\hat i = \hat j$

دستگاه مختصات راستگرد

3/ $|\vec{A}\times\vec{B}| = S$ مساحت متوازی الاضلاع $= 2S$ مثلث

4/

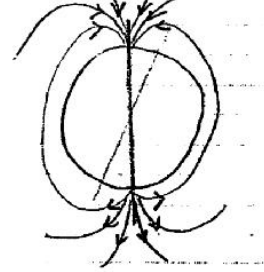


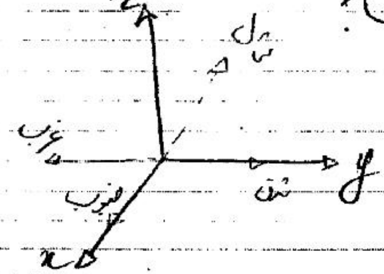
$$S = \tfrac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}| = \tfrac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{C}| = \tfrac{1}{2}|\vec{B}\times\vec{C}|$$

$$AB\sin\gamma = AC\sin\beta = BC\sin\alpha$$

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{C} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\alpha}{A}}$$ قضیه سینوس‌ها؟

مثال: الکترون با سرعت v رو به شمال؟ (اگر میدان مغناطیسی زمین واقع در قطب شمال) پرتاب می‌شود. جهت حرکت الکترون کدام است؟



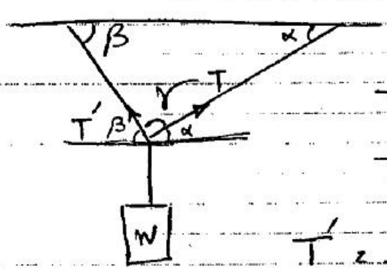


$\vec{B} = B(-\hat{k})$

$\vec{v} = v(-\hat{i})$

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = (-e)v(-\hat{i})\times B(-\hat{k}) = evB\,\hat{j}$$

مثال: سیستم در تعادل است، کشش؟

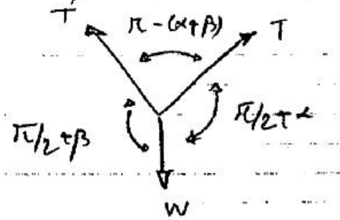


$T\cos\alpha = T'\cos\beta$

$T\sin\alpha + T'\sin\beta = W$

$$T' = \frac{W\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad T = \frac{W\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

روش دوم:



$$\frac{\sin(\pi-(\alpha+\beta))}{W} = \frac{\sin(\pi/2+\alpha)}{T'} = \frac{\sin(\pi/2+\beta)}{T}$$

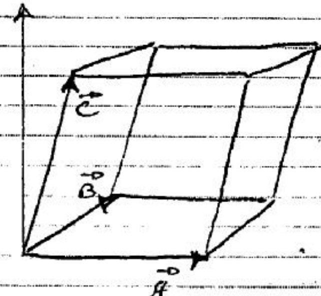
ضرب سه‌گانه: ۱-۱ اسکالر، ۲-۲ برداری

اسکالر $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$

1/ $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}$

$$2)\ \vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$$

$3)\ \vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} =$ حجم متوازی السطوح ساخته شده روی سه بردار

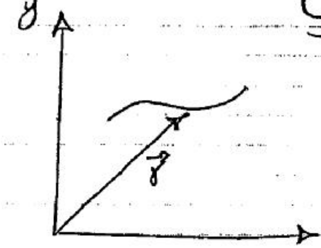


$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ضرب سه گانه برداری

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

تحلیل حرکت در دستگاه مختصات مختلف

۱- دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

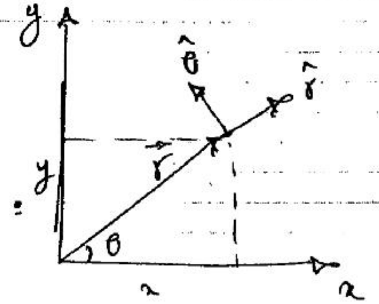
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \\ \vec{v}(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \end{cases}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j}\ ,\quad \vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \\ \vec{v}(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ \vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \end{cases}$$

۲- دستگاه مختصات قطبی



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$r^2 = x^2 + y^2\ ,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} = \dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} \end{cases}$$

اگر بردار در حین تغییر راستا ثابت بماند خودش بر مشتقش عمود است.

$$\vec{r} = r\hat{r} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

$$= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\hat{\theta}\dot{\theta}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta}) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r})$$

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

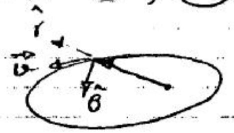
$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

مثال: مختصات ذره‌ای که بر روی یک صفحه حرکت می‌کند در دستگاه قطبی به صورت مقابل است: $r = 4t$, $\theta = t+1$

مولفه‌های مماسی شتاب این ذره کدام است؟

نکته * تنها برداری که بر مسیر مماس است بردار سرعت است.



$\hat{\theta}$ فقط در مسیر دایره‌ای مماس است.

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 8$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -4t$$

$$\vec{a} = -4t\hat{a}_r + 8\hat{a}_\theta$$

$\vec{r} = r\hat{i}$, $u_T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ بردار یکه سرعت

$a \cdot \hat{u}_T = a_T$ شتاب مماسی

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = 4\hat{r} + 4t\hat{\theta}$$

$$\hat{u}_T = \frac{\hat{r} + t\hat{\theta}}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \vec{a}_T = a\hat{u}_T$$

مثال: اگر بردار سرعت ذره‌ای در حرکت بر مسیری به صورت $\vec{v} = v_0\sin\theta\hat{r} + v_0\cos\theta\hat{\theta}$ باشد معادله مسیر این ذره کدام است؟

معادلات حرکت تغییرات متغیرها بر حسب زمان $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$

را به صورت تابعی از θ معادله مسیر گویند: $r(\theta)$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

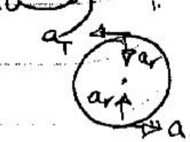
$$\begin{cases} \dot{r} = v_0\sin\theta \\ r\dot{\theta} = v_0\cos\theta \end{cases}$$

$$r\dot{\theta} = v_0\cos\theta \to r\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dr}\dot{r}$$

$$r\frac{d\theta}{dr}(v_0\sin\theta) = v_0\cos\theta \to \frac{dr}{r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$\ln\frac{r}{r_0} = -\ln\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0} \to r = \frac{c}{\cos\theta}$$

مثال: چرخی به شعاع R در روی زمین با شتاب ثابت میل برداری a می‌غلتد. در لحظه‌ای که سرعت لحظه‌ای مرکز برابر v_0 باشد شتاب هر نقطه از چرخ نسبت به سطح زمین کدام است؟
(مسئله ۲ از فصل اول کتاب ولز)



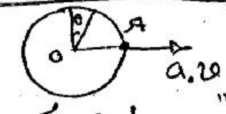
$r = Const \rightarrow \vec a = -r\dot\theta^2\hat r + r\ddot\theta\hat\theta$

$\hat r = b\sin\theta\,\hat i + b\cos\theta\,\hat j$

$a_{Total} = a_{مرکز} + a_{چرخش}$

$a = a_0\hat i + \left[b\frac{a_0}{b}\cos\theta - \frac{v_0^2}{b}\sin\theta\right]\hat i + \left[v_0\sin\theta + \frac{v_0^2}{b}\cos\theta\right]\hat j$

$a = \sqrt{a_i^2 + a_j^2}$ کل شتاب چرخ



مثال: برای ذره‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند و از حال سکون شروع به حرکت کرده است چه زمانی (از لحظه‌ی شروع حرکت) مؤلفه‌های مماسی و قائم بردار شتاب اندازه‌ی یکسان داشته باشند؟

$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\hat\theta$

$r = cte \rightarrow \vec a = -r\dot\theta^2\hat r + r\ddot\theta\hat\theta$

$r\dot\theta^2 = r\ddot\theta \rightarrow r\omega^2 = r\alpha \rightarrow \alpha = \omega^2$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{2}Rev = \pi\,rad$

نکته: هرگاه جسمی حرکت دارد با زمان ثابت نسبت این اندازه‌ی $\vec a$ با زمان ثابت نیست
مماسی از نظر اندازه‌ای ثابت است.

(با فرض شتاب زاویه‌ای ثابت) ← $\alpha = const \rightarrow \omega = \dot\theta = ...$

اثبات مهم

مثال: اگر بردارهای سرعت و شتاب ذره‌ای همواره بر هم عمود باشند نشان دهید اندازه‌ی سرعت ذره الزاماً باید ثابت باشد. (ثابت شود)

$\vec v\cdot\vec v = v^2$

$\frac{d}{dt}(\vec v\cdot\vec v) = 2v\dot v$

$\frac{d\vec v}{dt}\cdot\vec v + \vec v\cdot\frac{d\vec v}{dt} = \vec a\cdot\vec v + \vec v\cdot\vec a = 2\vec a\cdot\vec v = 2v\dot v$

$2v\dot v = 0 \rightarrow \dot v = 0 \rightarrow v = cte$

مثال: سوسکی روی یک میز دایره‌ای افقی به شعاع R که با آهنگ ثابت ω حول محور قائم در حال دوران است. اگر این سوسک از مرکز دیسک با سرعت شعاعی ثابت v_0 شروع به حرکت کند سرعت و شتاب آن نسبت به ناظر آزمایشگاه در لحظه‌ی t کدام است؟

$\theta = \omega t \quad , \quad r = v_0 t$

$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta = v_0\hat r + v_0 t\omega\hat\theta$

$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\hat\theta$
$= -v_0 t\omega^2\hat r + 2v_0\omega\hat\theta$

ص ۲۴

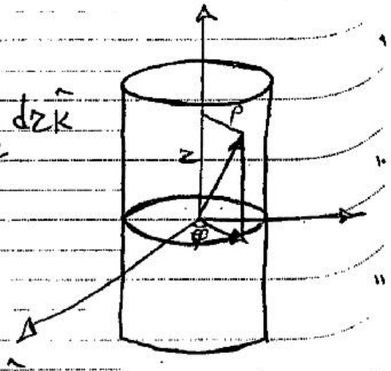
دستگاه مختصات استوانه‌ای

$\vec r = \rho\hat\rho + z\hat k$

$d\vec r = h_\rho\, d\rho\,\hat\rho + h_\varphi\, d\varphi\,\hat\varphi + h_z\, dz\,\hat k$

که شرح‌ها خطی ضریب سنجی ندارند

غیرخطی « « ضریب دارند



$d\vec r = d\rho\,\hat\rho + \rho\, d\varphi\,\hat\varphi + dz\,\hat k$

$\vec v = \dot\rho\hat\rho + \rho\dot\varphi\hat\varphi + \dot z\hat k$ بردار سرعت در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$\vec a = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\hat\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\hat\varphi + \ddot z\hat k$

$\vec v = h_1\dot q_1\hat q_1 + h_2\dot q_2\hat q_2 + h_3\dot q_3\hat q_3$

	q_1	q_2	q_3
دستگاه دکارتی	$h_x = 1$	$h_y = 1$	$h_z = 1$
« استوانه‌ای	$h_\rho = 1$	$h_\varphi = \rho$	$h_z = 1$
« کروی	$h_r = 1$	$h_\theta = r$	$h_\varphi = r\sin\theta$

مثال: ذره‌ای بر روی یک سطح استوانه‌ای در حال حرکت است که معادلات حرکتی آن در قرار زیر می‌باشد. $\varphi = 2t^2$, $z = 5t$
انرژی جنبشی آن ذره و زاویه‌ی بین بردارهای سرعت و شتاب آن در لحظه‌ی $t = 2s$ کدام است؟ $\rho = cte$

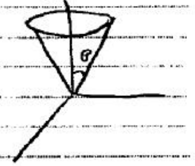
$\vec r = \rho\hat\rho + z\hat z \rightarrow \vec v = \dot\rho\hat\rho + \rho\dot\varphi\hat\varphi + \dot z\hat z$

$E = 1/2\, m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2)$

$\cos\theta = \dfrac{v\cdot a}{|v||a|} = ?$

مثال: ذره‌ای مقید به حرکت روی مخروطی به معادله $z = \rho\cot\theta$ می‌باشد. انرژی جنبشی آن ذره کدام است؟ (ص ۱۳ نقاط مقید)

$(\theta = cte)$



$\vec v = \dot\rho\hat\rho + \rho\dot\varphi\hat\varphi + \dot\rho\cot\theta\,\hat k$

$|v|^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot\rho^2\cot^2\theta$

$= \dot\rho^2(1+\cot^2\theta) + \rho^2\dot\varphi^2$

$= \dot\rho^2\csc^2\theta + \rho^2\dot\varphi^2$

$E_K = 1/2\, mv^2 = 1/2\, m(\dot\rho^2\csc^2\theta + \rho^2\dot\varphi^2)$

مثال: انرژی جنبشی ذره‌ای که در امتداد منحنی با معادله $Z = \alpha r^2$ حرکت می‌کند و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور قائم می‌چرخد کدام است؟ (که ρ استوانه‌ای است)

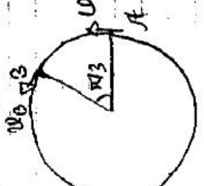
$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$, $\rho = r$, $\dot{\varphi} = \omega$

$Z = \alpha r^2 \rightarrow \dot{Z} = 2\alpha r\dot{r}$

$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \rho^2\omega^2 + 4\alpha^2 r^2\dot{r}^2)$

$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2(1 + 4\alpha^2 r^2) + \rho^2\omega^2)$

مثال: ذره‌ای بر روی یک دایره به شعاع R حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت v انجام می‌دهد. اندازه تغییر سرعت ذره از A تا B چقدر است؟



$\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$= 2v_A \sin \pi/6$

$= 2v(1/2)$

$= v$

ضرب برداری

۱) ضرب دوگانه { الف) عدد در بردار
ب) ضرب داخلی → نتیجه یک عدد
ج) ضرب خارجی }

$\alpha\vec{A} = \vec{B} \rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 & \vec{A} \parallel \vec{B} \\ \alpha < 0 & \vec{A} \nparallel \vec{B} \end{cases}$

$A \cdot B = \begin{cases} A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ AB\cos \end{cases}$

مثال: زاویه بین دو بردار

$OA = (3a, 2a, 5a)$

$OB = (3a, 0, 5a)$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|OA| \cdot |OB|}$

مثال: ذره‌ای با سرعت $\vec{v}_0$ ... با شتاب $\vec{a} = -g\hat{j}$ ... سرعت و شتاب این ذره در ...

۱) $\text{Arctg}\,\dfrac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}$

۳) $\pi/2 + \text{Arctg}\,\dfrac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}$

$v_x = v_{0x} = v_0\cos\theta$

$v_y = -gt + v_0\sin\theta$

2

حرکت در دستگاه مختصات کروی

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$d\vec{r} = 1\,dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}\bigg|_{\theta=\pi/2} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$
$$+ (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\varphi}$$

مثال: حشره‌ای بر روی کره‌ای به شعاع R به گونه‌ای می‌لغزد؟ حرکت آن در دستگاه مختصات کروی با معادلات زیر بیان می‌شود:

$\varphi = \omega t \,,\; \theta = \pi/4 + \frac{1}{2}\cos\omega t \,,\; r = R$

انرژی جنبشی و مقدار ... مسیر این حشره را پیدا کنید.

$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$

$r = R = Const \rightarrow \dot{r} = 0$

$\theta = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\omega t \rightarrow \dot{\theta} = -\omega\sin 2\omega t$

$\varphi = \omega t \rightarrow \dot{\varphi} = \omega$

* مثال: ماهواره‌ای از قطب جنوب پرتاب می‌شود پس از رسیدن به ارتفاع $h = R_e$ از سطح زمین در امتداد نصف‌النهار به خط استوا آمده و سپس به دور زمین می‌چرخد. اگر حرکت در امتداد نصف‌النهار به گونه‌ای باشد که سرعتش به طور خطی افزایش یابد:

الف) چه مدت زمانی طول می‌کشد تا به خط استوا برسد.

ب) بردار سرعت زمین ماهواره کدام است؟

$r\dot{\theta} = Kt$

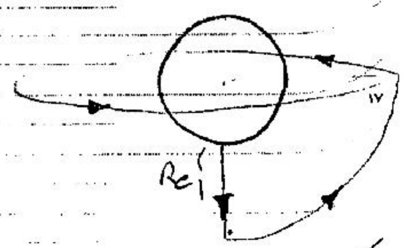
$r\frac{d\theta}{dt} = Kt$

$$\boxed{\theta = \frac{Kt^2}{2R_e}}$$

الف $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$t = \sqrt{\frac{2R_e\pi}{K}}$



حرکت سه بعدی

اگر بردار مکان را نسبت به زمان بررسی کنیم ذره حرکت می‌کند.

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$

برای بردارهای مکان $\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ ثابت نیستند پس از زیر انتگرال خارج نمی‌شوند ولی $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ همیشه ثابتند.

$\vec{\bar{v}}$ متوسط $= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \longrightarrow$ لحظه‌ای v یا $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ، $\Delta t \to 0$

شتاب $\bar{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \rightarrow$ لحظه‌ای a یا $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ، $\Delta t \to 0$

1- حرکت مستقیم الخط با سرعت ثابت

$\bar{v} =$ لحظه‌ای v ، $a = 0$

از معادله اول $x = x(t)$
در جه دوم $v = v(t)$

$x = vt + x_0 \rightarrow \Delta x = \bar{v}t$ (لحظه‌ای)

2- حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت

لحظه‌ای $\bar{a} = a$

از درجه دوم $x = x(t)$
معادله اول $v = v(t)$

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

$v = v_0 + at$ ، $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

$\Delta x = \bar{v} t \Rightarrow \bar{v} = \frac{v+v_0}{2}$

1/ $\bar{v} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{t_1+t_2+\dots+t_n}$ جمع برداری / جمع نرده‌ای

اگر متحرکی در حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت مسافت‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با سرعت‌های $v_1, v_2, \dots, v_n$ در زمان‌های $t_1 \dots t_n$ طی کند سرعت متوسط از رابطه‌ی بالا بدست می‌آید.

2/ مسافت طی شده در n امین ثانیه‌ی حرکت عبارت است از:

$x_n = \frac{1}{2}an(2t-n) + nv_0 = x_{(t)} - x_{(t-n)}$

زمان کل حرکت

در یک ثانیه: $n=1 \rightarrow x = \frac{1}{2}a(2t-1) + v_0$

3/ $x_t = \frac{1}{2}a(2t-1) + v_0$

مسافت طی شده در ثانیه‌ی tام

4/ در حرکت با شتاب ثابت جابجایی‌های متحرک در زمان‌های مساوی و متوالی تصاعد حسابی را می‌دهند که قدر نسبت آن برابر است با at^2.

$x_{(t)} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ ، $x_{(2t)} = 2at^2 + 2v_0 t$

$\Delta x = x_{2t} - x_t = \underbrace{\frac{1}{2}at^2 + v_0 t}_{x_t} + at^2$

5/ مسافت طی شده در n امین t ثانیه

$\frac{1}{2}a(n-\frac{1}{2})t^2 + v_0 t$

تذکر 1: اگر معادله‌ی مسیر یک متحرک را در اختیار داشته باشیم می‌توانیم با مشتق گیری از معادله از رابطه‌ی میان مؤلفه‌های سرعت در مکان‌های مختلف را برای شیب مورد نظر بدست آوریم.

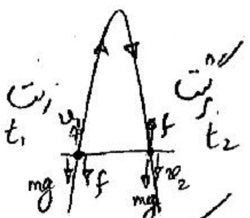
تذکر 2: اگر حرکت کند شونده باشد و در نقطه‌ای مانند B خاتمه یابد می‌توان حرکت را در جهت معکوس بررسی نمود و آن را با شتاب مثبت و سرعت اولیه صفر از B شروع نماییم.

تذکر 3: در حرکت در راستای قائم تمام معادلات حرکت با شتاب ثابت با جایگذاری $a = -g$ قابل کاربرد خواهند بود.

تذکر 4: $v_1 = v_2$ در خلأ

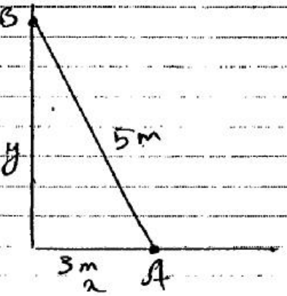
$v_1 > v_2$ در هوا

$t_1 < t_2$



مثال: متحرکی که بر روی خط $y - x = 400$ حرکت می‌کند دارای سرعت کل 8m/s می‌باشد. اگر این جسم در راستای افق متحمل هیچ نیرویی نشود مسافت 10m در راستای افق در چند ثانیه توسط جسم طی می‌شود؟ !?

۹



$v_A = 2m/s$, $v_B = ?$

$x^2 + y^2 = (5)^2$, $y = 4$

$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$

$\dot{y} = v_B = ?$

$2(3)(2) + 2(4)(v_B) = 0 \rightarrow v_B = -\frac{6}{4} = \frac{-3}{2} m/s$

مثال: متحرکی حرکت خود را روی محور ox با شتاب ثابت a و بدون سرعت اولیه شروع می‌کند و پس از 8s متوقف می‌شود. اگر جابجایی آن در 2s اول حرکت a_1 و در 2s آخر حرکت a_2 باشد نسبت a_1 و a_2 چقدر است؟

[illegible]

(۱۱) ۸

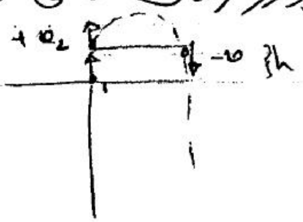
2s 2s 2s 2s

$x_1' = \frac{1}{2}at^2 + 2at^2$ $x_2 = \frac{1}{2}at^2$

$\frac{7}{2}at^2 = x_1 = \frac{1}{2}at^2 + 3at^2$ $x_2' = \frac{1}{2}at^2 + at^2$

$\frac{x_1}{x_2} = 7$

مثال: دو گلوله از ارتفاع h یکسان و با سرعت اولیه 50 m/s با فاصله زمانی 2s نسبت به یکدیگر در راستای قائم در جهت بالا پرتاب می‌شوند. این دو گلوله پس از چه مدتی با هم تلاقی می‌کنند و در زمان تلاقی سرعت آن‌ها چقدر است؟



$v - v_0 = gt \rightarrow t = 4s$

۱۴

$-v = v_0 - gt$ بردار

$v = v_0 - g(t - \theta)$ دوم

$2v = g\theta \rightarrow v = \frac{1}{2}g\theta$

اختلاف زمانی پرتاب

$h = \frac{v + v_0}{2}t$

از h می‌توان بدست آورد θ, h, t

۳۹

مثال: جسمی که از حال سکون شروع به حرکت می کند نصف مسافت پیموده اش را در ثانیه آخر حرکتش می پیماید. ارتفاع سقوط چقدر است؟

$$\left.\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2} g (t+1)^2 \\ \tfrac{H}{2} &= \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} t = 2.4\,s$$

$$T = 1 + 2.4 = 3.4$$

$$H = \tfrac{1}{2} g (t+1)^2 = 56.64\ m$$

$$56.99\ m$$

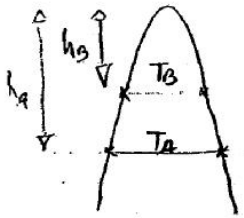
$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0$$

$$0 = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t + \tfrac{h}{2}$$

$$\tfrac{h}{2} = \tfrac{g}{2} + v_0 \quad (1)$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g\tfrac{h}{2} \quad (2)$$

مثال: گلوله ای را از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می کنیم. اگر گلوله 2s و 4s پس از شروع حرکتش از مقابل پنجره عبور کند سرعت آن در مقابل پنجره چه کسری از سرعت اولیه است؟ (1/3)



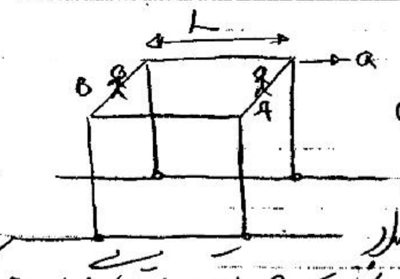
$$h_B = \tfrac{1}{2} g t_B^2 , \quad h_A = \tfrac{1}{2} g t_A^2$$

$$h = ? \quad h_A - h_B = \tfrac{1}{2} g (t_A^2 - t_B^2) = h$$

$$h = \tfrac{1}{2} g \left(\left(\tfrac{t_A}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{t_B}{2}\right)^2 \right)$$

۴۰ (14)

مثال: ارابه ای به طول L مطابق شکل با شتاب a در حال حرکت است. شخص A واقع در جلوی ارابه نارنجکی را با چه سرعت اولیه در امتداد قائم به سمت بالا پرتاب کند تا به شخص B واقع در انتهای ارابه برخورد کند؟

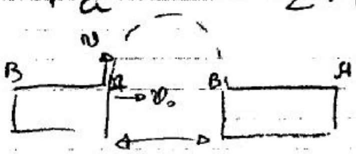


زمانی که طول را می شود
زمانی که طول L را طی کند

$$\Delta x = \tfrac{1}{2} a t^2 = L \rightarrow t = \sqrt{\tfrac{2L}{a}}$$

زمان رفت و برگشت $t_0 = \dfrac{2v_0}{g}$

$$\Rightarrow \frac{2v_0}{g} = \sqrt{\frac{2L}{a}} , \quad v_0 = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{2L}{a}}$$



$$x + \alpha x = \beta \rightarrow x = ?$$

$$x \rightarrow \theta , \quad v \rightarrow \omega$$

$$\theta = \tfrac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \qquad X = \tfrac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \underbrace{X - x}_{L} = \tfrac{1}{2} a t^2$$

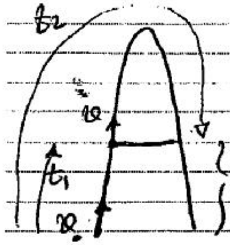
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha \Delta\theta$$

$$\theta = \frac{\omega + \omega_0}{2} t$$

$$t = \frac{2v}{g}$$

$$L = \tfrac{1}{2} a \left(\frac{2v}{g}\right)^2 \rightarrow v = ?$$

۱۳۱



زمان رفت و برگشت $t_1 + t_2 = T = \frac{2v_0}{g}$

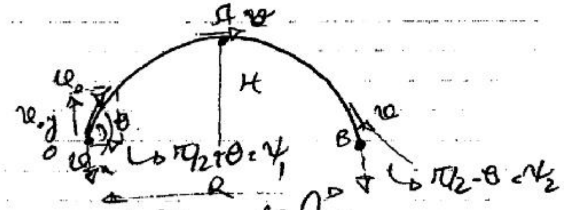
$v_0 = \frac{1}{2} g(t_1 + t_2)$

$v = v_0 - gt_1 = \frac{1}{2} g(t_2 - t_1)$

$h = \frac{v + v_0}{2} t_1 = \frac{1}{2} g t_1 t_2$

حرکت پرتابی

حرکتی است که جسم تحت تاثیر نیروی وزن در امتداد قائم انجام می‌دهد



$v_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases}$, $v \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$

$\vec{v} = \begin{cases} v_y = v_0 \sin\theta - gt \\ v_x = v_0 \cos\theta \end{cases}$

۱

۷۵

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta$, $x = v_0 t \cos\theta$

معادلات حرکت

با حذف t میان معادلات حرکت به معادله مسیر می‌رسیم.

$y = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta$ (معادله سهمی)

نکته ۱: بردار سرعت همواره بر مسیر مماس است. از این رو در حرکت بردار سرعت دائماً در حال تغییر است در صورتیکه بردار شتاب همواره در جهت زمین است.

تغییر زاویه میان بردار سرعت و شتاب برابر است با:

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\pi/2 - \theta) - (\pi/2 + \theta) = -2\theta$

نکته 2:

$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$

سرعت در هر نقطه به زاویه پرتاب بستگی ندارد و فقط به سرعت اولیه و ارتفاع پرتاب بستگی دارد.

نکته 3:

نقطه اوج $\begin{cases} \vec{v} = v_x \hat{i} , \quad v_y = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{v} \\ E_K = (E_K)_{min} \end{cases}$