سرفصل درس

آشنایی با مفاهیم پایه آمار و احتمال

تابع پارش

گاز کامل

نظریه جنبشی

توزیع گیبس

آمار بوز- اینشتین

آمار فرمی- دیراک

گذارهای فاز

فصل اول: احتمال

رویداد ساده – رویداد مرکب –فضای نمونه

احتمال کلاسیکی

$$p_i = \frac{۱}{W}$$

احتمال آماری

$$p_i = \lim_{N\to\infty} \frac{n_i}{N}$$

احتمال رویداد مرکب

$$p_{i+j} = p_i + p_j$$

احتمال رویداد مستقل

$$p_{i,j} = p_i \times p_j$$

مثال : برداشتن تصادفی یک کارت از بین ده کارت با اعداد مختلف. محاسبه احتمال برداشتن اعداد سه یا شش.

$$p_{i+j} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$

مثال: پرتاب یک سکه و یک تاس.
محاسبه احتمال آوردن همزمان شماره سه تاس و روی سکه.

$$p_{۳,t} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

شمارش رویدادها

آرایه ها

جایگشتها

$$W = \frac{n!}{m!}$$

$$W = \frac{n!}{(n-m)!}$$

ترکیبها

$$W = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{r} n_i!}$$

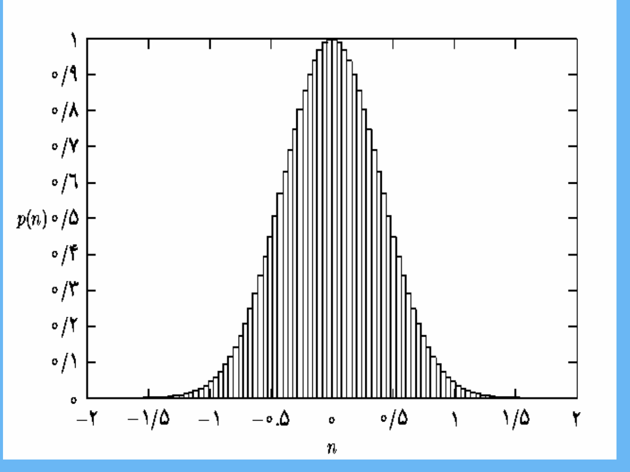
$$\sum_{i=1}^{r} n_i = N$$

مثال: محاسبه احتمال آوردن
حداقل شش h
در پرتاب هشت سکه.

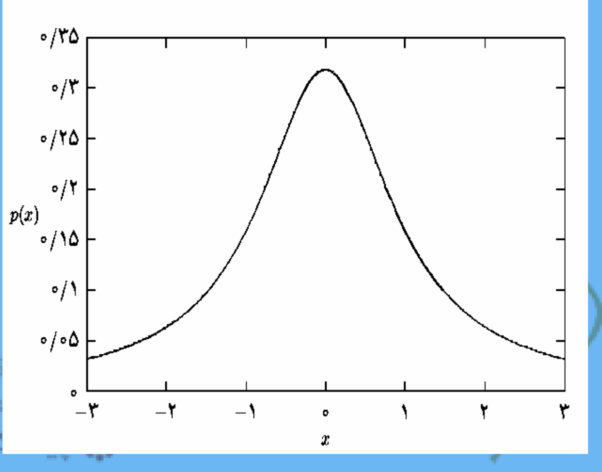
$$
\begin{aligned}
W_۱ &= \frac{۸!}{۶!۲!} = ۲۸ \\
W_۲ &= \frac{۸!}{۷!۱!} = ۸ \\
W_۳ &= \frac{۸!}{۸!۰!} = ۱ \\
W &= ۲^۸ = ۲۵۶ \\
p_۱ &= \frac{۲۸}{۲۵۶}, \quad p_۲ = \frac{۸}{۲۵۶}, \quad p_۳ = \frac{۱}{۲۵۶} \\
p &= p_۱ + p_۲ + p_۳ = \frac{۳۷}{۲۵۶}
\end{aligned}
$$

توزیع

توزیع گسسته



توزیع پیوسته



تابع توزیع
احتمال

$$p(x)$$

$$p(x)dx$$

برای توزیع گسسته

$$p(n_i) = \frac{W(n_i)}{\sum_{i=1}^{r} W(n_i)}$$

برای توزیع پیوسته

$$p(x) = \frac{W(x)}{\int_a^b W(x)dx}$$

احتمال

$$p = \int_a^b p(x)dx$$

میانگین در توزیع گسسته

$$\overline{f(n_i)} = \sum_{i=1}^{r} p(n_i) f(n_i)$$

میانگین در توزیع پیوسته

$$\overline{f(x)} = \int_a^b p(x) f(x) dx$$

انحراف معیار توزیع گسسته

$$\sigma = \sqrt{\overline{(n_i - \bar{n}_i)^2}}$$

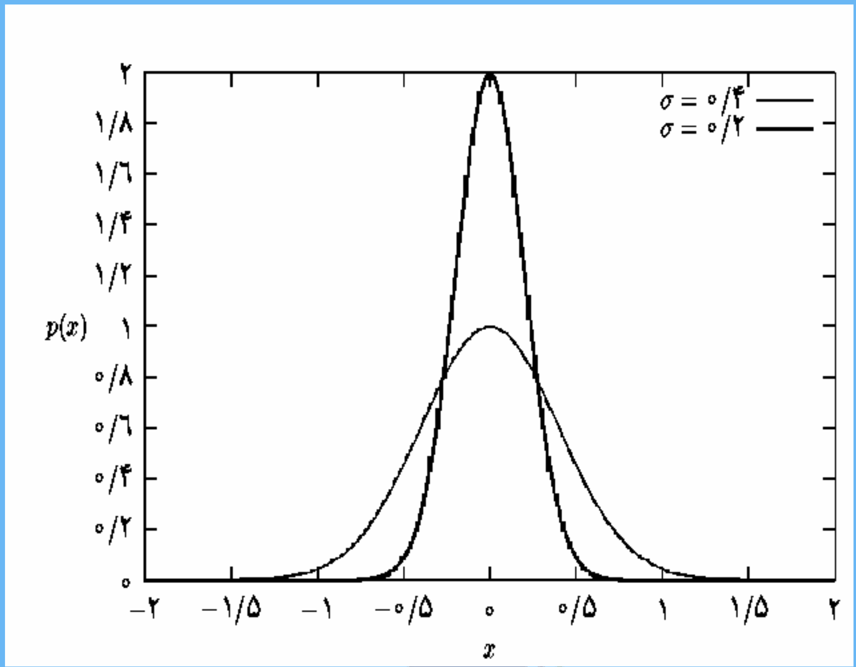
انحراف معیار توزیع پیوسته

$$\sigma = \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}}$$

قضیه

$$\overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

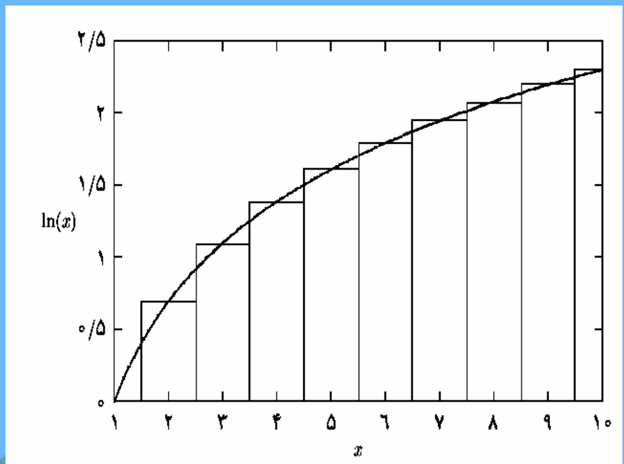
انحراف معیار: پهنای نمودار



تقریب استرلینگ

$$\ln n! = n \ln n - n$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$



مثال: با این تقریب می توان
نشان داد در پرتاب
تعدادی سکه محتملترین
نتیجه آن است که تعداد
پشت و رو یکسان باشد.

دقت تقریب استرلینگ

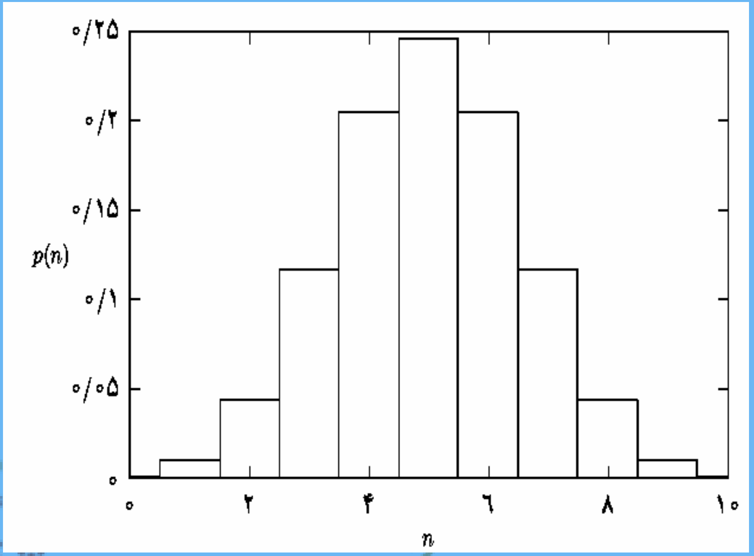
$(n+۰/۵)\ln n-n+۰/۵\times\ln(۲\pi)$	$n\ln n-n$	$\ln n!$	n
۴/۷۷	۳/۰۵	۴/۷۹	۵
۲۷/۸۹	۲۵/۶۲	۲۷/۹۰	۱۵
۵۸/۰۰	۵۵/۴۷	۵۸/۰۰	۲۵
۹۲/۱۳	۸۹/۴۴	۹۲/۱۴	۳۵
۱۲۹/۱۲	۱۲۶/۳۰	۱۲۹/۱۲	۴۵
۱۶۸/۳۲	۱۶۵/۴۰	۱۶۸/۳۲	۵۵
۲۰۹/۳۴	۲۰۶/۳۳	۲۰۹/۳۴	۶۵

ضرایب نامعین لاگرانژ

$$
\begin{aligned}
\ln f &= N \ln N - \sum_{i=1}^{r} n_i \ln n_i \\
d \ln f &= -\sum_{i=1}^{r} \ln n_i dn_i \\
\sum_{i=1}^{r} n_i &= N \\
\sum_{i=1}^{r} dn_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{r} (\ln n_i + \lambda) dn_i &= 0 \\
n_i &= e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

توزیع دوجمله ای

$$
\begin{aligned}
p(n) &= \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)!\left(\frac{N-n}{2}\right)!} p^{\frac{1}{2}(N+n)} q^{\frac{1}{2}(N-n)} \\
n &= n_+ - n_-
\end{aligned}
$$



مثال: سکه ای را ده بار پرتاب می کنیم.
احتمال آوردن چهار t را حساب کنید.

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2}, \quad N = 10, \quad n_+ = 4 \\
n &= n_+ - n_- = 4 - 6 = -2 \\
p(-2) &= \frac{10!}{4!6!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0/205
\end{aligned}
$$

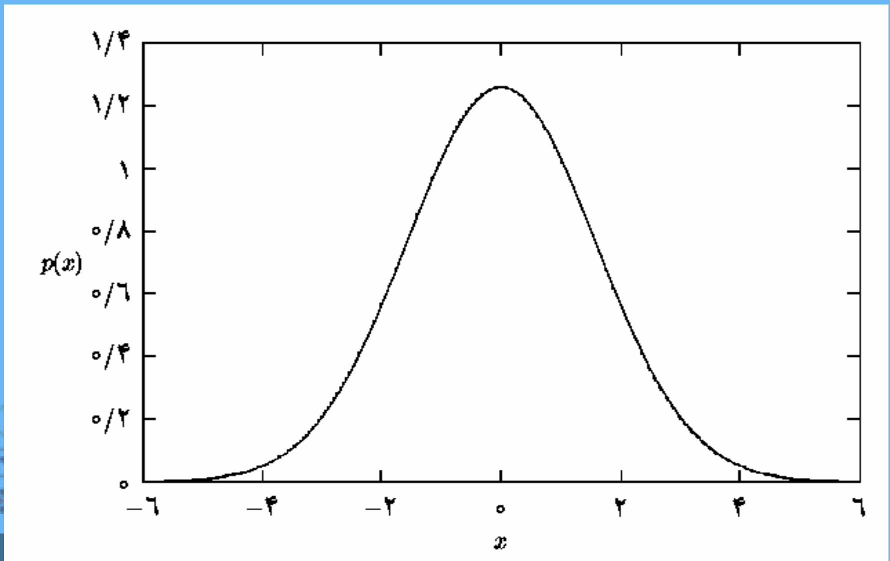
توزیع چند جمله ای

$$
\begin{aligned}
p(n) &= \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} p_1{}^{n_1} p_2{}^{n_2} \cdots p_r{}^{n_r} \\
N &= \sum_{i=1}^{r} n_i
\end{aligned}
$$

توزیع گاوسی

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, e^{\frac{-2(x-x_0)^2}{n}}$$

$$n = n_+ + n_-$$



فصل دوم: مفاهیم پایه

موضوع مکانیک آماری

حالت دستگاه کلاسیکی

حالت دستگاه کوانتومی

دستگاه منزوی

پارامتر- تعادل –افت و خیز

میکروحالت

thth hthth hhtt tttt

ماکروحالت

مثال : ماکروحالتهای پرتاب چهار سکه.

ماکروحالت	میکروحالتها	احتمال وقوع
چهار h	$hhhh$	$\frac{۱}{۱۶}$
سه h و یک t	$hhht$ و $hhth$ و $hthh$ و $thhh$	$\frac{۴}{۱۶}$
دو h و دو t	$hhtt$ و $htht$ و $thht$ و $thth$ و $tthh$ و $htth$	$\frac{۶}{۱۶}$
یک h و سه t	$ttth$ و $ttht$ و $thtt$ و $httt$	$\frac{۴}{۱۶}$
چهار t	$tttt$	$\frac{۱}{۱۶}$

مثال: ماکروحالتهای شش ذره با انرژی 8E

ماکروحالت	میکروحالتها
پنج ذره در تراز ε و یک ذره در تراز ۳ε	$\frac{۶!}{۵!۱!} = ۶$
چهار ذره در تراز ε و دو ذره در تراز ۲ε	$\frac{۶!}{۴!۲!} = ۱۵$

میانگین گیری روی ماکروحالتها

$$\bar{n}_j = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i W_i(n_j)}{\sum_{i=1}^{r} W_i(n_j)}$$

مثال: برای دستگاهی از شش
ذره با ترازهای انرژی
E,2E,3E و انرژی کل
8E

$$\bar{n}_1 = \frac{5 \times 6 + 4 \times 15}{6 + 15} = \frac{30}{7}$$

$$\bar{n}_2 = \frac{0 \times 6 + 2 \times 15}{6 + 15} = \frac{10}{7}$$

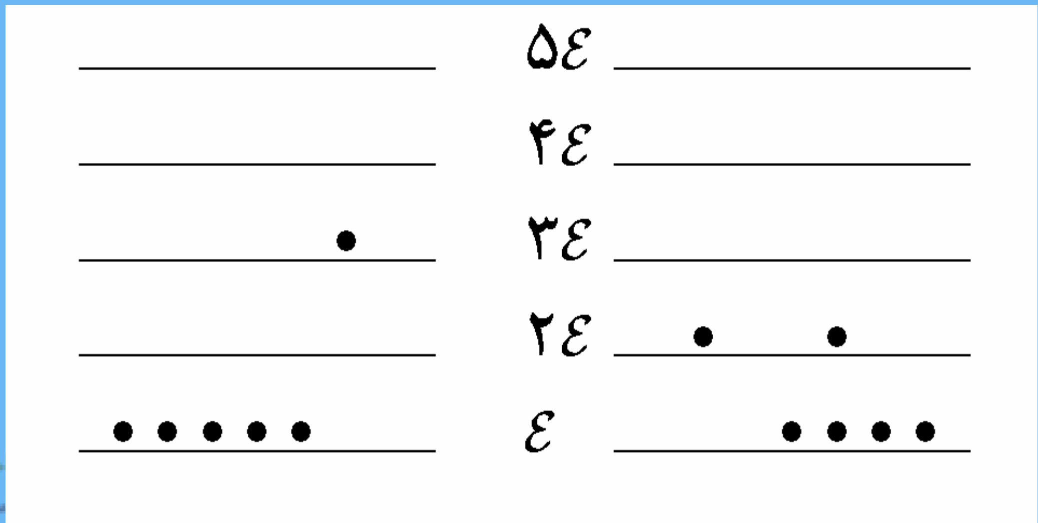
$$\bar{n}_3 = \frac{1 \times 6 + 0 \times 15}{6 + 15} = \frac{2}{7}$$

$$\bar{n} = \frac{30}{7} + \frac{10}{7} + \frac{2}{7} = 6.$$

آمار تمیز پذیر: جایگزیدگی

تعادل : برهمکنش ضعیف

مثال: در شکل مقابل انرژی
دو ماکروحالت یکسان
است. یک ذره از
تراز اول و یک ذره
از تراز سوم به
تراز دوم
می روند.



تعداد میکروحالتها:

شرایط: ترازهای گسسته و ناواگن و برهمکنش ضعیف.

$$W = \frac{n!}{\prod_{i=۱}^{r} n_i!}$$

مثال: ماکروحالتهای دستگاه هفت ذره ای با انرژی 4E

p	W	$n_{۴}$	$n_{۳}$	$n_{۲}$	$n_{۱}$	$n_{۰}$	ماکروحالت
$\frac{۷}{۲۱۰}$	۷	۱	۰	۰	۰	۶	۱
$\frac{۴۲}{۲۱۰}$	۴۲	۰	۱	۰	۱	۵	۲
$\frac{۲۱}{۲۱۰}$	۲۱	۰	۰	۲	۰	۵	۳
$\frac{۱۰۵}{۲۱۰}$	۱۰۵	۰	۰	۱	۲	۴	۴
$\frac{۳۵}{۲۱۰}$	۳۵	۰	۰	۰	۴	۳	۵

مثال:

دستگاهی از N ذره تمیزپذیر با برهمکنش ضعیف که هر ذره تنها دو حالت با انرژیهای نامنفی ۰ و $\mathcal{E}$ دارد و وقتی $N >> 1$، داریم $\frac{E}{N} = \overline{\mathcal{E}}$. حداکثر مقدار ممکن $\frac{E}{N}$ را در حالت تعادل و در حالت عدم تعادل و نیز تعداد میکروحالتهای تعادل را حساب کنید.

در عدم تعادل $\mathcal{E} = \frac{N\mathcal{E}}{N}$ و در تعادل $\frac{1}{2}\mathcal{E} = \frac{E}{N}$ و

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{N!}{N_0!(N-N_0)!} \\
&= \frac{N!}{\left(N - \frac{E}{\mathcal{E}}\right)!\left(\frac{E}{\mathcal{E}}\right)!}
\end{aligned}
$$

واگنی

واگنی دستگاه

واگنی دستگاه

تاثیر واگنی بر تعداد میکروحالتها

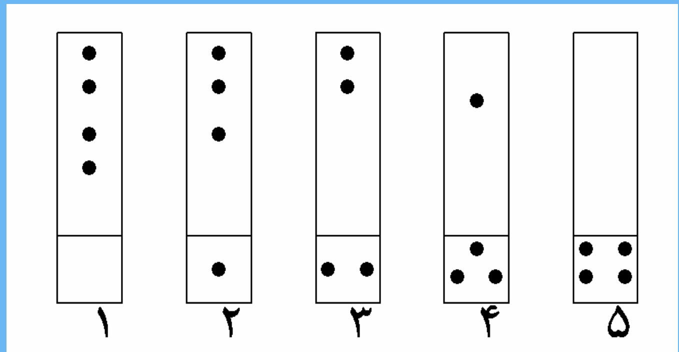
$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} {g_1}^{n_1} {g_2}^{n_2} \cdots {g_r}^{n_r}$$

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = N$$

مثال: ماکروحالتهای شش ذره تمیزپذیر در دو تراز انرژی با واگنی از مرتبه های دو و پنج

ماکروحالت	n_1	n_2	W
۱	۶	۰	$\frac{6!}{6!0!} \times 2^6 \times 5^0 = 64$
۲	۵	۱	$\frac{6!}{5!1!} \times 2^5 \times 5^1 = 960$
۳	۴	۲	$\frac{6!}{4!2!} \times 2^4 \times 5^2 = 5000$
۴	۳	۳	$\frac{6!}{3!3!} \times 2^3 \times 5^3 = 20000$
۵	۲	۴	$\frac{6!}{2!4!} \times 2^2 \times 5^4 = 37500$
۶	۱	۵	$\frac{6!}{1!5!} \times 2^1 \times 5^5 = 37500$
۷	۰	۶	$\frac{6!}{6!6!} \times 2^0 \times 5^6 = 15625$

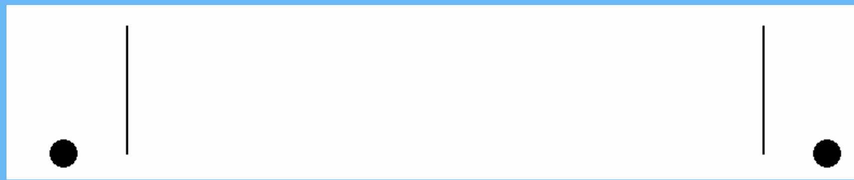
مفهوم واگنی. مثال: چهار ذره تمیز پذیر در دو بخش یک جعبه



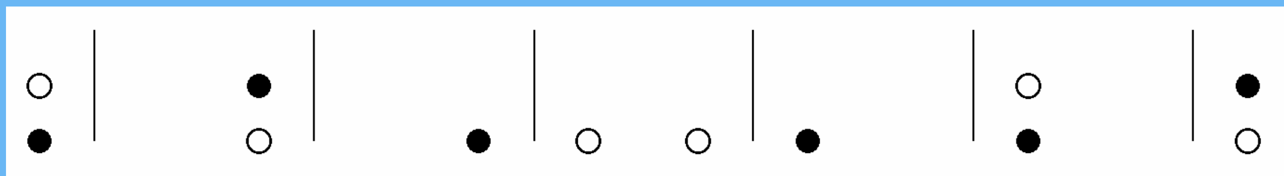
ماکروحالت	ضریب وزن	ضریب واگنی	احتمال وقوع
۱	$(\frac{3}{4})^4 = 0/316$	$\frac{4!}{0!(4-0)!} = 1$	۰/۳۱۶
۲	$(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^3 = 0/105$	$\frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$	۰/۴۲۲
۳	$(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^2 = 0/035$	$\frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$	۰/۲۱۱
۴	$(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4}) = 0/012$	$\frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$	۰/۰۴۷
۵	$(\frac{1}{4})^4 = 0/004$	$\frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$	۰/۰۰۴

آمار تمیز پذیر

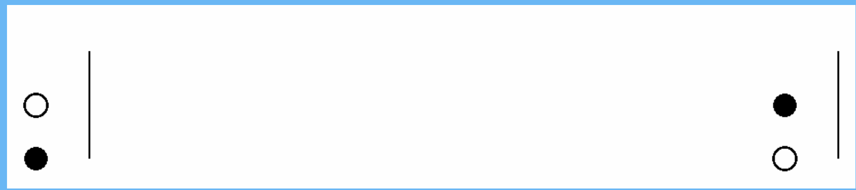
شمارش حالتها:



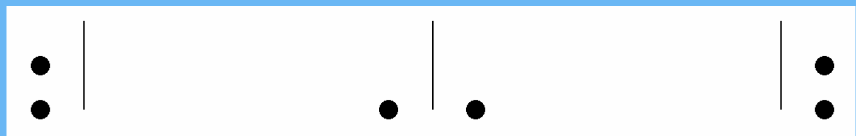
حالتهای ممکن آرایش یک ذره و دو تراز.



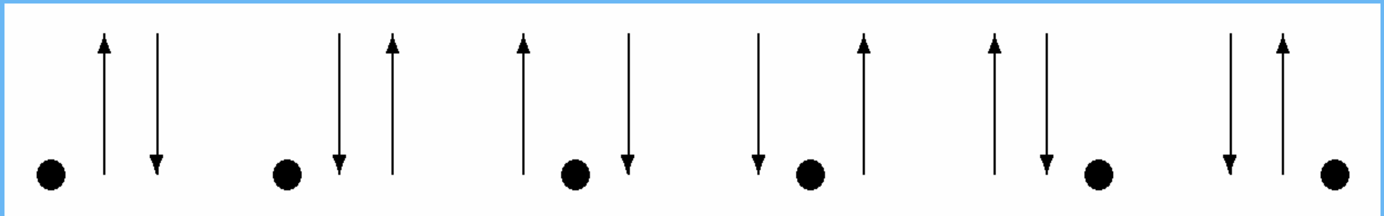
حالتهای ممکن آرایش دو ذره و دو تراز.



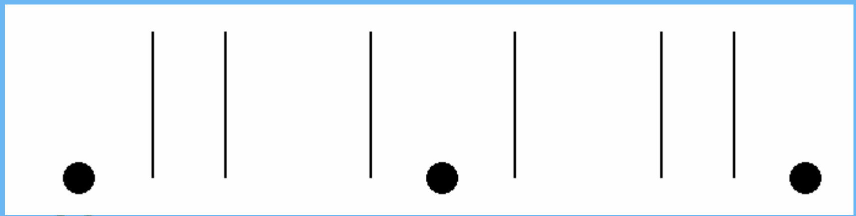
دو آرایه متمایز.



حالتهای ممکن آرایش دو ذره تمیزناپذیر و دو تراز.



حالتهای ممکن آرایش یک ذره و سه تراز تمیزپذیر.



حالتهای ممکن آرایش یک ذره و سه تراز تمیزناپذیر

تعداد راههای توزیع
ذرات تمیزناپذیر در
ترازهای یکسان

$$\frac{(n_i + m_i - 1)!}{(n_i)!(m_i - 1)!}$$

تعداد کل میکروحالتها

$$W = \prod_i \frac{(n_i + m_i - 1)!}{(n_i)!(m_i - 1)!}$$

هنگرد

هنگرد میکروبندادی

هنگرد بندادی

هنگرد بندادی بزرگ

پتانسیل شیمیایی

آنتروپی در هنگرد میکروبندادی

اصل بولتزمن

$$S = k_B \ln W$$

$$k_B = ۱/۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\ J/K$$

مثال: محاسبه آنتروپی دستگاه دو ترازی با انرژیهای ۰ و $\mathcal{E}$

$$
\begin{aligned}
S &= k_B \ln W \\
&= k_B \ln \left(\frac{N!}{\left(\frac{E}{\mathcal{E}}\right)! \left(N - \frac{E}{\mathcal{E}}\right)!} \right) \\
&= k_B \left(\ln N! - \ln \left(\frac{E}{\mathcal{E}}\right)! - \ln \left(N - \frac{E}{\mathcal{E}}\right)! \right) .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\mathcal{E} &\gg E \gg \mathcal{E} \Rightarrow \\
\frac{E}{\mathcal{E}} &\gg ۱, \quad N - \frac{E}{\mathcal{E}} \gg ۱ \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= k_B\left(N\ln N - \frac{E}{\mathcal{E}}\ln\left(\frac{E}{\mathcal{E}}\right) - \left(N - \frac{E}{\mathcal{E}}\right)\ln\left(N - \frac{E}{\mathcal{E}}\right)\right) \\
&\quad + k_B\left(-N + \frac{E}{\mathcal{E}} + \left(N - \frac{E}{\mathcal{E}}\right)\right) \\
&= Nk_B((n-۱)\ln(۱-n) - n\ln n)
\end{aligned}
$$

$$
n = \frac{E}{N\mathcal{E}}
$$

آنتروپی در هنگرد بندادی

$$W = \frac{\mathcal{N}!}{\prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_i!}.$$

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{N}} &= k_B \ln W \\
&= k_B \left(\ln \mathcal{N}! - \ln \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_i! \right) \\
&= k_B \left(\ln \mathcal{N}! - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \ln \mathcal{N}_i! \right) \\
&= k_B \left(\mathcal{N} \ln \mathcal{N} - \mathcal{N} - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_i \ln \mathcal{N}_i + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_i \right)
\end{aligned}$$