$$\delta_{max} = D \cdot U_s$$

$$U_s = \frac{f_0}{k} = \frac{450}{180000} = \frac{1}{400}(m) = 0.25\ cm$$

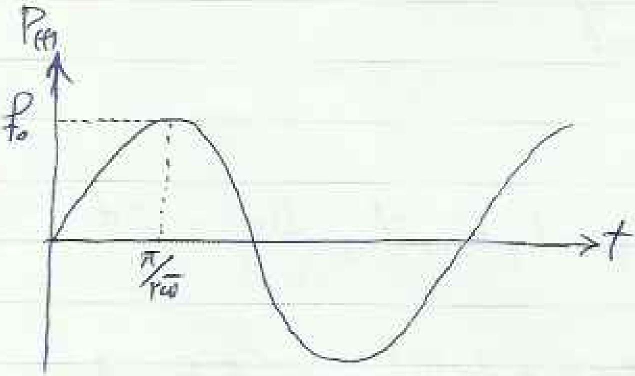
$$\Longrightarrow \delta_{max} = 1.3 \times 0.25 = 0.325\ (cm) = 3.25\ (mm)$$

حداکثر نیروی وارد به پی $\quad V_{max} = K \cdot \delta_{max} = 180000(0.00325^{m}) = 585\ (kN)$

حداکثر نیروی وارد بر هر ستون

اگر هر دو ستون یکسان فرض شوند $\quad F_{max} = \frac{585}{2} = 292.5\ (kN)$ به هر ستون

(IV) بار هارمونیک (تناوبی):



$$P_{(t)} = f_0 \sin \bar{\omega} t$$

$\bar{\omega}$ فرکانس بار وارده

f_0 حداکثر مقدار بار تناوبی

بدون میرایی $\quad m\ddot{u} + ku = P_{(t)} = f_0 \sin \bar{\omega} t$

$$u_{p(t)} = A \sin \bar{\omega} t + B \cos \bar{\omega} t$$

$$\ddot{u}_{(t)} = -A\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t - B\bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} t = -\bar{\omega}^2 (A \sin \bar{\omega} t + B \cos \bar{\omega} t)$$

$$\Rightarrow \left[-m\bar{\omega}^2 + k\right](A \sin \bar{\omega} t + B \cos \bar{\omega} t) = f_0 \sin \bar{\omega} t$$

$$B = 0 \ , \ A(k - m\bar{\omega}^2) = f_0 \longrightarrow A = \frac{f_0}{k - m\bar{\omega}^2}$$

$$A=\frac{f_0}{k-m\bar{\omega}^2}=\frac{f_0/k}{1-\frac{m}{k}\bar{\omega}^2}=U_s\frac{1}{1-\bar{\omega}^2/\omega^2}$$

نسبت فرکانس بار وارده به فرکانس ارتعاشی سیستم را $\beta=\frac{\bar{\omega}}{\omega}$ تعریف می‌کنیم

$$\Rightarrow A=U_s\frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow U_P(t)=\frac{U_s}{1-\beta^2}\sin\bar{\omega}t$$

جواب عمومی general $U_g(t)=A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t$

جواب کلی $U(t)=U_g(t)+U_P(t)=A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t+\frac{U_s}{1-\beta^2}\sin\bar{\omega}t$

A_1 و B_1 را نیز برحسب شرایط اولیه می‌توانیم محاسبه کنیم:

$$\dot{U}(t)=A_1\omega\cos\omega t-B_1\omega\sin\omega t+\frac{U_s\bar{\omega}}{1-\beta^2}\cos\bar{\omega}t$$

فرض کنیم $U(0)=U_0=0\Longrightarrow B_1=0$

$$\dot{U}(0)=\dot{U}_0=0\Longrightarrow A_1\omega+\frac{U_s\bar{\omega}}{1-\beta^2}=0\Rightarrow A_1=-\frac{U_s}{1-\beta^2}\underbrace{\frac{\bar{\omega}}{\omega}}_{\beta}$$

$$\Rightarrow A_1=-\frac{U_s\beta}{1-\beta^2}$$

$$U_{(t)} = -\frac{U_s\beta}{1-\beta^2}\sin\omega t + \frac{U_s}{1-\beta^2}\sin\bar{\omega} t$$

$$U_{(t)} = U_s\,\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\bar{\omega} t - \beta\sin\omega t\right]$$

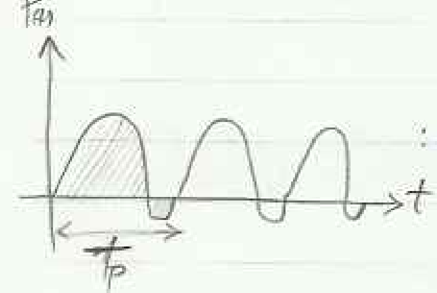
پاسخ یک سیستم یک درجه آزادی بدون میراگر با بار هارمونیک

Page 7

اگر $\beta = 1$ باشد، پدیده تشدید رخ می‌دهد.

۹۱/۲/۲ شنبه

بارهای با بسط سری فوریه:



ممکن است بارگذاری به صورت غیر سینوسی ولی به صورت تکراری وارد شود:

می‌توان این بار را با استفاده از بسط سری فوریه به شکل زیر منظور نمود:

$$P_{(t)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2\pi n}{T_P}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{2\pi n}{T_P}t$$

مساحت زیر منحنی تقسیم بر T_P

$$a_0 = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P_{(t)}\,dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} P_{(t)}\cos\frac{2\pi n}{T_P}t\,dt$$

$$, \quad b_n = \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} P_{(t)}\sin\frac{2\pi n}{T_P}t\,dt$$

خطی

$$P_{(t)}^{s} = \underbrace{b_n}_{F_0}\sin\underbrace{\frac{2\pi n}{T_P}}_{\bar{\omega}_n}t$$

بارگذاری $P_{(t)} = F_0\sin\bar{\omega}_n t \longrightarrow U_s = \frac{F_0}{K} = \frac{b_n}{K}$

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{2\pi n}{T_P\cdot\omega}$$

$$U^{s}_{n}(t) = \frac{b_n}{K}\,\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\left[(1-\beta_n^2)\sin\bar{\omega}_n t - 2\xi\beta_n\cos\bar{\omega}_n t\right]$$

به طور مشابه برای بارگذاری کسینوسی هم داریم:

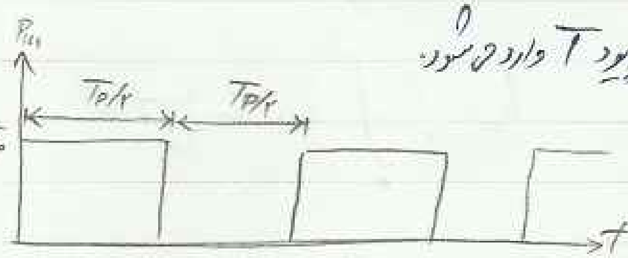
$$U^{c}_{n}(t) = \frac{a_n}{K}\,\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\left[(1-\beta_n^2)\cos\bar{\omega}_n t + 2\xi\beta_n\sin\bar{\omega}_n t\right]$$

در نتیجه پاسخ نهایی عبارتند از:

$$\Longrightarrow\quad U(t) = \frac{a_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(U^{c}_{n}(t) + U^{s}_{n}(t)\right)$$

$$\boxed{U(t) = \frac{a_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K}\,\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\Big[\big(a_n(1-\beta_n^2) - 2b_n\xi\beta_n\big)\cos\bar{\omega}_n t + \big(2a_n\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)\big)\sin\bar{\omega}_n t\Big]}$$

مثال: بارگذاری مطابق شکل به سازه یک درجه آزادی با پریود T وارد می‌شود.
مطلوبست محاسبه تغییر مکان این سازه:



$$T_p = T$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} F_0\,dt = \frac{1}{T}F_0\frac{T}{2} = \frac{F_0}{2}$$

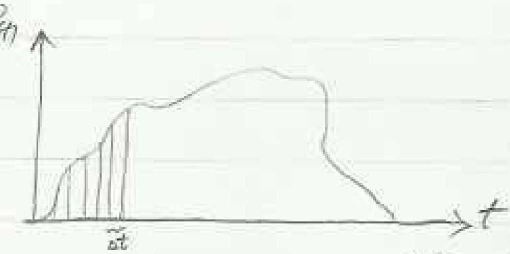
یا مساحت زیر منحنی تقسیم بر T

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} F_0 \cos\frac{2\pi n}{T_p} t \, dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} F_0 \sin\frac{2\pi n}{T} t \, dt = \begin{cases} \frac{2F_0}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{T_p}\cdot\frac{1}{\omega} = \frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{1}{\omega} = n \quad , \quad \bar{\omega}_n = \frac{2\pi n}{T} = \omega n$$

$$u_{(t)} = \frac{F_0}{K}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1,\ n \text{ فرد}}^{\infty} \frac{1}{(1-n^2)^2+(2\xi n)^2}\left[\frac{-2}{\pi}\xi\cos(n\omega t) + \frac{2}{n\pi}(1-n^2)\sin(n\omega t)\right]\right\}$$



بارگذاری لرزه‌ای کلی :

فرض کنیم بارگذاری $P_{(t)}$ نامشخص است و تابع خاصی ندارد :

بار ناشی از یک زلزله، در یک سازه یک درجه آزادی با جرم m عبارتست از :

$$P_{(t)} = m\ddot{u}_{g(t)}$$

$\ddot{u}_{g(t)}$ شتاب ناشی از زلزله است که توسط شتاب‌نگار به دست می‌آید :

فرض می‌کنیم بارگذاری $P_{(t)}$ به صورت ضربه‌های پشت سر هم است :

ضربه $I = P.\Delta t = mV$

V سرعت
m جرم
P نیرو
Δt بازه زمانی

می‌توان اثر این ضربه را به صورت حرکت یک ارتعاش آزاد با سرعت اولیه V تلقی نمود.

بدون میرایی
$$u_{(t)} = \underbrace{u_0}_{\text{صفر}} \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$u_{(t)} = \frac{V}{\omega}\sin\omega t = \frac{P.\Delta t}{m\omega}\sin\omega t$$

فرض کنید ضربه در زمان $t=t^*$ به سازه وارد شده است، لذا تغییر مکان جرم در زمان‌های بیش از t^* برابر است:

$$t > t^* \longrightarrow u_{(t)} = \frac{P_{(t^*)}\,\Delta t^*}{m\omega}\sin\omega(t-t^*)$$

می‌توان بارگذاری کلی را مجموعه‌ای از ضربات مجزا از هم فرض نمود، لذا تغییر حرکت به ازای یک ضربه برابر است:

$$\Delta u = \frac{P_{(t^*)}\,\Delta t^*}{m\omega}\sin\omega(t-t^*)$$

$$\Delta t \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \Sigma \rightarrow \int$$

$$\boxed{u_{(t)} = \Sigma\Delta u = \int_0^t \frac{P_{(t^*)}}{m\omega}\sin(t-t^*)\omega\, dt^*}$$

انتگرال دوهامل

اگر سازه دارای میرایی هم باشد:

$$u_{(t)} = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P_{(t^*)}\, e^{-\xi\omega(t-t^*)}\sin\omega_D(t-t^*)\, dt^*$$

رابطه بالا برای بارگذاری کلی بود، اگر بارگذاری زلزله باشد داریم:

$$P_{(t)} = m\ddot{u}_{g(t)}$$

بدون میرایی $$u_{H1} = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(t^*) \sin \omega (t - t^*) \, dt^*$$

با میرایی $$u_{H1} = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(t^*) e^{-\xi\omega(t-t^*)} \sin \omega_D (t - t^*) \, dt^*$$