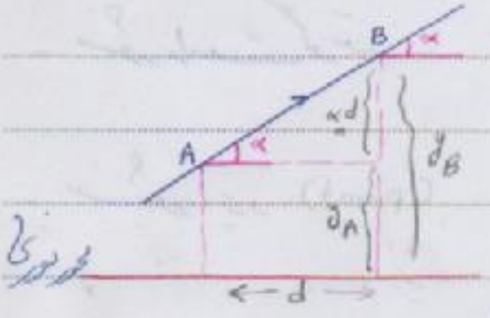
Subject . جلسه ی ششم Year. Month. Day.

نورشناسی ماتریسی : تحلیل ریاضی برای اینکه سیستم های پیچیده تر را راحت تر تحلیل کنیم

برای هر نقطه از پرتو ۲ مشخصه تعریف می کنیم :



$A : \begin{pmatrix} y_A \\ \alpha \end{pmatrix}$ زاویه ی پرتو با محور : شیب

1 } در یک محیط همگن منتشر شود
2 } پرتوی شکست با سطح شکست
{ در هر دو حالت می خواهیم نورشناسی ماتریسی را بررسی کنیم.

در محیط همگن، مسیر پرتو تغییر نمی کند زاویه و شیب آن همان است فقط ارتفاع تغییر می کند

$B : \begin{pmatrix} y_B \\ \alpha \end{pmatrix}$

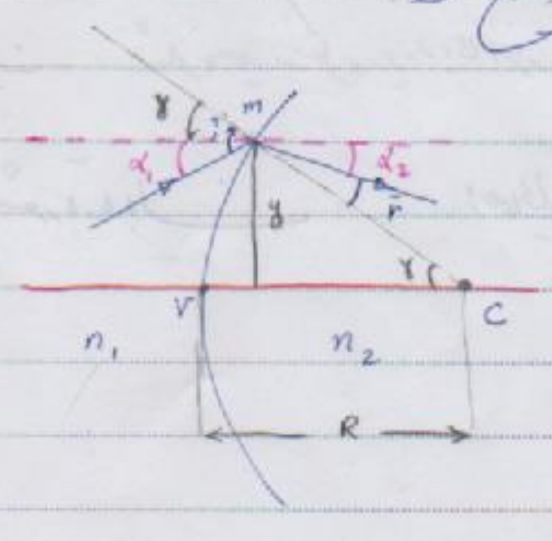
$tg\, \alpha_A = \frac{y_B - y_A}{d}$ $\quad tg A \cong \alpha_A$ شرایط پیرامحوری در محیط همگن $y_A \neq y_B$

$$\alpha_A = \frac{y_B - y_A}{d} \Rightarrow y_B = y_A + \alpha_A d \quad , \quad \alpha_B = 0\, y_A + \alpha_A$$

$$\begin{pmatrix} y_B \\ \alpha_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ \alpha_A \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_A \\ \alpha_A \end{pmatrix}$$

بردار ها که ماتریس یک ستونی هستند
تصویر جسم بررسی شود : باید بتوانیم از ۲ ماتریس تا تصویر واقع شود

حالت ۲ : سطح شکست



$\alpha_2 , \gamma < 0$

$i , R , \alpha_1 , r > 0$

TOSEHE

n_1 در محیط M : $\begin{pmatrix} y_{M_1} \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ n_2 در محیط M : $\begin{pmatrix} y_{M_2} \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

$n_1 \sin i = n_2 \sin r \qquad n_1 i = n_2 r \qquad \begin{cases} i = \alpha_1 - \gamma \\ r = \alpha_2 - \gamma \end{cases}$ در شرایط پیرامحوری

$-\gamma = \frac{y_{M_1}}{R} = \frac{y_{M_2}}{R} = \frac{y}{R}$

کمیت‌ها را در رابطه‌ی اسنل جایگذاری می‌کنیم.

$$n_1\left(\alpha_1 + \frac{y}{R}\right) = n_2\left(\alpha_2 + \frac{y}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{y}{R} \\ y_{M_2} = \overset{y}{y_{M_1}} + 0\,\alpha_1 \end{cases}$$

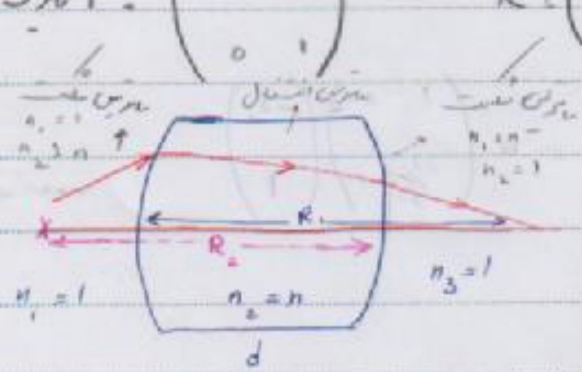
با توجه به این دو رابطه، ماتریس را می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

برای پرتوی که به یک عدسی می‌خورد می‌خواهیم ماتریس را به دست آوریم:

ماتریس انتقال $T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$

ماتریس عدسی :



$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix}}_{R'}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}}_{R} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(n-1)d}{nR_1} & \frac{d}{n} \\ \underbrace{(n-1)\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{d(n-1)}{nR_1R_2}\right]}_{-1/f} & 1 + \frac{n-1}{n}\frac{d}{R_2} \end{pmatrix}$$

Subject . Year. Month. Day.

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = ABCD \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = (R')\,T(R) \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

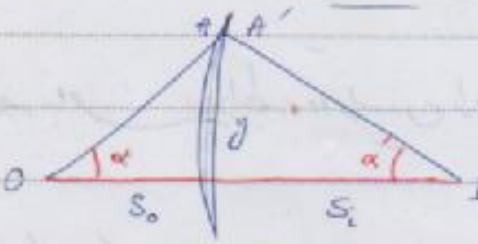
اگر عدسی نازک باشد $d=0$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix}$$

توان عدسی

با استفاده از ماتریس عدسی محل تصویر یک جسم که روی محور عدسی قرار دارد را بدست آوریم.

* محل تصویر جسمی نقطه‌ای از یک عدسی نازک از دیدگاه نور شناسی هندسی :



سطوح عدسی بر هم منطبق هستند به علت نازک بودن

ماتریس انتقال اعمال نمی‌کنیم :

$O\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\quad y = -\alpha S_0$

$S_o,\ \alpha' < 0 \qquad y,\ \alpha,\ S_i > 0$

ماتریس عدسی نازک :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -S_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_0\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S_o \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -S_o \\ \frac{S_o}{f} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\alpha' \end{pmatrix} \quad (1)$$

تصویر $I = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -\alpha' \end{pmatrix} \quad (2)$

توان عدسی $D = \frac{1}{f}$

(1) $\Rightarrow \quad y = -\alpha S_0$

$$\frac{\alpha S_0}{f} + \alpha = -\alpha' \quad (3)$$

(2) $\Rightarrow \quad 0 = y - \alpha' S_i \quad (3)$

$$-\alpha' = -\alpha'$$

(3) $\Rightarrow \quad \frac{\alpha S_0}{f} + \alpha = \frac{+y}{S_i} = \frac{+\alpha S_0}{S_i} \qquad \boxed{\frac{\alpha S_0}{f} + \alpha = \frac{+\alpha S_0}{S_i}} \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{-1}{S_0} + \frac{1}{S_i}$

شکل: دستگاه نوری

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_1 + A\alpha_1 d_1 + B\alpha_1 + Cd_2 y_1 + C\alpha_1 d_1 d_2 + d_2 D\alpha_1 \\ Cy_1 + C\alpha_1 d_1 + D\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Ay_1 + Cd_2 y_1 + \alpha_1 \left[Ad_1 + B + Cd_1 d_2 + d_2 D\right] \\ Cy_1 + C\alpha_1 d + D\alpha_1 \end{pmatrix}$$

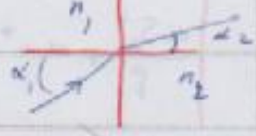
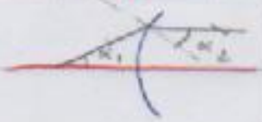
استیگماتیک　　تصویر هر نقطه یک نقطه است.

آستیگماتیک　　تصویر یک نقطه، یک نقطه نیست.

برای اینکه y_2 به α وابسته نباشد یعنی استیگماتیک باشد باید این شرط برقرار شود

$$Ad_1 + B + Cd_1 d_2 + d_2 D = 0$$

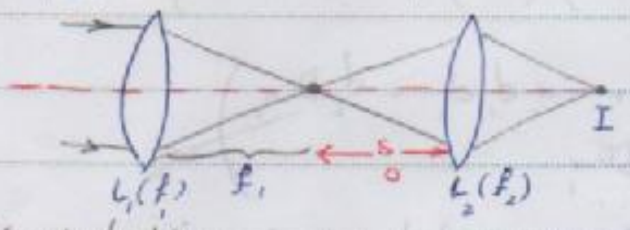
طبقه‌بندی ماتریس‌ها:

نام و نشانه‌ی ماتریس	عکس مختصات	ماتریس
انتقال		$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
شکست از سطح تخت R_∞		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$
شکست از سطح خمیده R		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$
عدسی نازک و آینه‌ی خمیده عدسی نازک		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

برای عدسی ضخیم

$$L=\begin{pmatrix} 1-\frac{(n-1)d}{nR_1} & \frac{d}{n} \\ \underbrace{(n-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}+\frac{d(n-1)}{R_1R_2n}\right)}_{-1/f} & 1+\frac{n-1}{n}\frac{d}{R_2} \end{pmatrix}$$

ماتریسی که شامل ۲ عدسی باشد به فواصل کانونی f_1 و f_2، عدسی‌ها با فاصله‌ی d از هم قرار داشته باشند در نظر می‌گیریم:



$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ماتریس انتقال مربوط به فاصله‌ی دو عدسی

$$M=L_2\,T\,L_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\frac{d}{f_1} & d \\ -\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1f_2}\right) & 1-\frac{d}{f_2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{1}{f}=\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1}-\frac{d}{f_1f_2}}$$

از طریق رسم پرتوی شکست، با رسم و عمود کردن بردارها سطح اصلی را به دست آورید و از طریق این‌ها

فاصله‌ی کانونی را یافت.

Aberration Theory — نظریه‌ی ابیراهی در دستگاه‌های نوری

فرض کنیم تصویر یک نقطه، یک نقطه باشد: دستگاه نوری ایده‌آل. ولی هیچ دستگاه نوری ایده‌آل نیست. در شرایط پیرامحوری این شرایط برقراره.

در شرایط پیرامحوری $\sin\alpha \simeq \alpha$, $tg\alpha \simeq \alpha$

$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^{3}}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \cdots \rightarrow$ ابیراهی مرتبه‌ی ۳

اگر تا مرتبه‌ی ۲ بنویسیم در دستگاه نوری ابیراهی ایجاد نمیشه.

$\cos\alpha = 1 - \alpha^2/2! + \alpha^4/4! + \cdots$

شرایط پیرامحوری

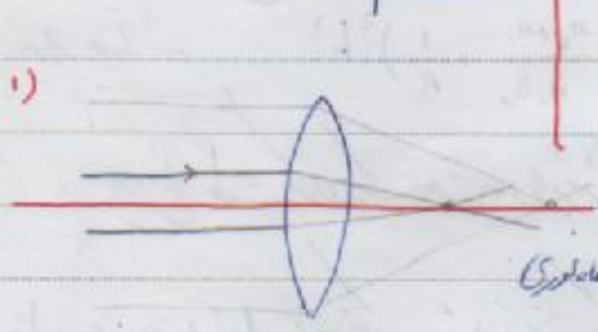
۵ مهم‌ترین ابیراهی : $\sin\alpha \simeq \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$ ابیراهی مرتبه‌ی سوم

ابیراهی‌های مرتبه‌ی سوم :

ابیراهی‌های تکفام:

1. ابیراهی کروی (Spherical Ab.) — ما معمولا داریم
2. ابیراهی کما (ابیراهی کامتی) (Comet Ab.)
3. ابیراهی آستیگماتیسم (Astigmatism Ab.)
4. ابیراهی خمیدگی میدان (Curvature field Ab.)
5. ابیراهی واپیچش (Distortion Ab.)

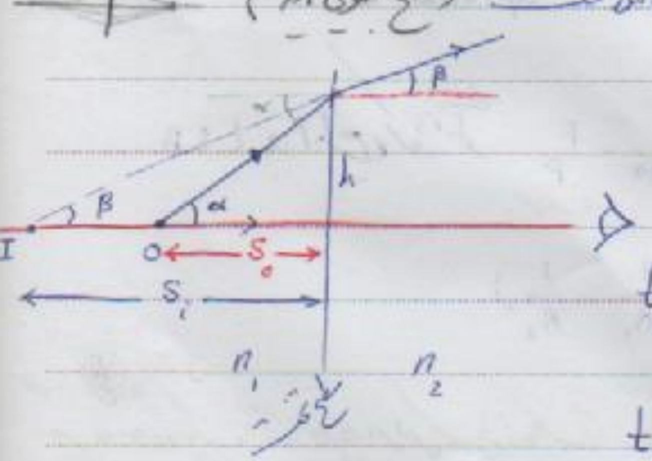
1)



ابیراهی رنگی ← برای نور مرکب : به خاطر پاشندگی در دستگاه نوری

تنها دستگاه نوری که ابیراهی تکفام و رنگی ندارد آینه‌ی کاملا تخت (سطح جلوی آینه)

الف - ابیراهی از سطح شکست تخت



$$tg\beta = \frac{h}{S_i} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{h}{S_o}$$

جزوه — principle of optics مکس بورن

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{n_1 \sin\alpha}{n_2\left[1-\left(\frac{n_1 \sin\alpha}{n_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{h}{S_i} \qquad tg\alpha = \frac{h}{S_o} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+S_o^2}}$$

$$S_i = \varphi\,(h^2+S_o^2)^{\frac{1}{2}}\left[n^2 - \frac{h^2}{(h^2+S_o^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad n = \frac{n_2}{n_1}$$

$h \simeq 0 \qquad S_i = nS_o \qquad n = \frac{S_i}{S_o} = \frac{\text{عمق ظاهری}}{\text{عمق واقعی}}$ حالت پیرامحوری

$\Delta S = S_i' - S_i$:میزان ابیراهی کروی

بی ابیراهی پیرامحوری بدون ابیراهی — با ابیراهی

$h \neq 0$ تقریب $\frac{h}{S_o} \ll 1 \qquad S_i = n|S_o|\left[1 + \frac{h^2}{2n^2S_o^2}(n^2-1)\right]$

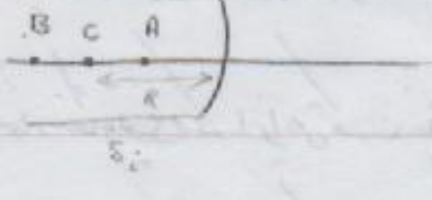
$$\left(n^2\left(\frac{h^2}{S_o^2}+1\right)S_o^2 - h^2\right)^{1/2}$$

ابیراهی کروی سطح شکست کروی

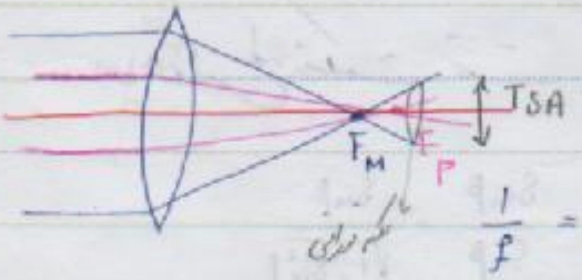
$$\Delta S \simeq -\frac{(n_2-n_1)}{2n_2\left(\frac{1}{S_o}+\frac{n_2-n_1}{n_1R}\right)}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S_o}\right)^2\left(-\frac{n_2+n_1}{n_1S_o}+\frac{1}{R}\right)^2 h$$ میزان خطا شده

if : $S_o = \frac{n_1+n_2}{n_1}R \qquad \Delta S = 0 \rightarrow$ این سطح شکست کروی در یک حالت خاص صفر میشود

تصویر یک نقطه میشه



نقطه A و B را نقاط اپلاناتیک (آپلاناتیک) گوییم
= هم نقطه aplanatic



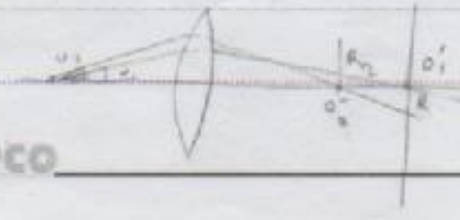
$\Delta f = F_M - F_P$ ابیراهی کروی طولی : LSA

پیرامحوری

حاشیه‌ای

محور مرکزی

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



هر چه جسم نزدیک‌تر شود $O'O$ ابیراهی کروی طولی است — $O'R$ ابیراهی کروی عرضی است