Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه‌ی ششم

S_n ها متغیر جابجایی هستند

$S_0 = 0 \qquad S_{N+1} = 0$

$m\ddot{S}_n = K(S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n) \qquad n = 1, \dots, N$

جواب: $S_n = C_n e^{i\omega t} + C'_n e^{-i\omega t}$

چون جواب‌های $e^{i\omega t}$ و $e^{-i\omega t}$ متمایز اند
فرقی نمی‌کند اگر ضریب C را در نظر بگیریم و بعد تعمیم بدهیم

$-m\omega^2 C_n = K(C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n)$

جواب: $C_n = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}$

$-m\omega^2 = k(e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2) = 2K(\cos\theta - 1) = -4K\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad \omega^2 = \frac{4K}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}$

$S_n = (Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta})e^{i\omega t} + (A'e^{in\theta} + B'e^{-in\theta})e^{-i\omega t}$

$= Ae^{i(n\theta + \omega t)} + Be^{-i(n\theta - \omega t)} + A'e^{i(n\theta - \omega t)} + B'e^{-i(n\theta + \omega t)}$

مرور شرایط مرزی: $S_0 = 0 \rightarrow C_0 = 0 \qquad A + B = 0 \qquad A = -B$

$S_{N+1} = 0 \rightarrow C_{N+1} = 0 \qquad Ae^{i(N+1)\theta} - A'e^{-i(N+1)\theta} = 0$

$e^{2i(N+1)\theta} = 1 = e^{2\pi i} \qquad \boxed{\theta_q = \frac{\pi q}{N+1}} \qquad q = 1, 2, \dots, N$

1) $S_n = A\left[e^{i(n\theta_q + \omega_q t)} - e^{-i(n\theta_q - \omega_q t)}\right] + A'\left[e^{i(n\theta_q - \omega_q t)} - e^{-i(n\theta_q + \omega_q t)}\right]$

باید با S^* هم برابر باشد

2) $S_n^* = A^*\left[e^{-i(n\theta_q + \omega_q t)} - e^{i(n\theta_q - \omega_q t)}\right] + A'^*\left[e^{-i(n\theta_q - \omega_q t)} - e^{i(n\theta_q + \omega_q t)}\right]$

$\Rightarrow$ 1), 2) $\Rightarrow A^* = -A' \qquad A = a + ib \qquad A' = -a + ib$

$S_n = \sum_{q=1}^{N} a_q e^{i(n\theta_q + \omega_q t)} - a_q e^{-i(n\theta_q - \omega_q t)} - a_q e^{i(n\theta_q - \omega_q t)} + a_q e^{-i(n\theta_q + \omega_q t)}$
$+ ib_q e^{i(n\theta_q + \omega_q t)} - ib_q e^{-i(n\theta_q - \omega_q t)} + ib_q e^{i(n\theta_q - \omega_q t)} - ib_q e^{-i(n\theta_q + \omega_q t)}$

$$S_n = \sum_{q=1}^{N} 2a_q \left[\cos(n\theta_q + \omega_q t) - \cos(n\theta_q - \omega_q t) \right] - 2b_q \left[\sin(n\theta_q + \omega_q t) + \sin(n\theta_q - \omega_q t) \right]$$

$$S_n = -4a_q \sin n\theta_q \sin \omega_q t - 4b_q \sin n\theta_q \cos \omega_q t$$

$$S_n = \sum_{q=1}^{N} \sin n\theta_q \left[\bar{a} \sin \omega_q t + \bar{b} \cos \omega_q t \right]$$ موج ایستاده وابسته به q

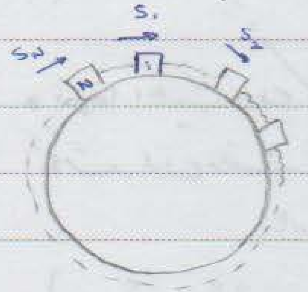
$$S_n = A e^{i(n\theta + \omega t)}$$ در حالت

$n=1 \quad e^{i\theta}$

$n=2 \quad e^{2i\theta}$

در هر کدام از این‌ها θ اختلاف فاز بین موج‌های روان را ایجاد می‌کند
اختلاف فاز بستگی به مکان دارد و مربوط به q وابسته هستند.

تمرین - $S_0 = S_1 \quad S_N = S_{N+1}$



$$m\ddot{S}_1 = -k(S_1 - S_N) + k(S_2 - S_1)$$

$$m\ddot{S}_2 = -k(S_2 - S_1) + k(S_3 - S_2)$$

$$m\ddot{S}_n = k(S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n) \qquad \begin{cases} S_{N+1} = S_1 \\ S_N = S_0 \\ S_{N+K} = S_K \end{cases}$$

$$S_n = C_n e^{i\omega t} \qquad -m\omega^2 C_n = k(C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n)$$

$$C_n = A e^{in\theta} + B e^{-in\theta} \qquad -m\omega^2 = 2k(\cos\theta - 1) = -4k \sin^2 \theta/2$$

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \theta/2$$

$$C_1 = C_{N+1} \qquad A e^{i\theta} + B e^{-i\theta} = A e^{i(N+1)\theta} + B e^{-i(N+1)\theta}$$

$$A e^{i\theta} \left[1 - e^{iN\theta} \right] = B e^{-i\theta} \left[-1 + e^{iN\theta} \right]$$

$$C_0 = C_N \qquad A+B = Ae^{iN\theta} + Be^{-iN\theta}$$

$$Ae^{ik\theta}\left[1 - e^{iN\theta}\right] = Be^{-ik\theta}\left[-1 + e^{-iN\theta}\right]$$

این عبارت باید به ازای هر k صحیح باشد ضرایب صفر است

$$e^{-iN\theta} = 1$$
$$e^{iN\theta} = 1 = e^{2\pi i q}$$

$$\theta_q = \frac{2\pi q}{N} \qquad q = 0, 1, \ldots, N-1, ~~N~~$$

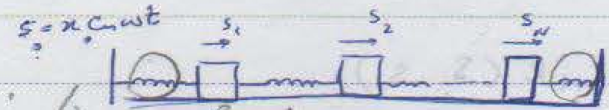
که دوباره صفر میشه.

$$\boxed{\omega_q^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\pi q}{N}}$$

$\omega = 0$ تولید چون مثل جسم صلب میشه. مود بخاری این صفره.

در محیط به بعدا حل کنیم

جلسه‌ی هفتم



* فنرها اهمیت دارن که باشن یا نه چون اگر فنر سمت چپ نباشد اون وقت نیرو مربوط به S_0 نیست ؛ اگر فنر به سمت راست نباشد در مورد S_{N+1} مشکل پیش میاد این مشکلی نیست

$$S_0 = x_0 \cos\omega t$$

$$m\ddot{S}_1 = k(S_2 - S_1) - kS_1 + kx_0 \cos\omega t$$
$$m\ddot{S}_2 = -k(S_2 - S_1) + k(S_3 - S_2)$$
$$\vdots$$
$$m\ddot{S}_N = -k(S_N - S_{N-1}) - kS_N$$

$$\begin{cases} m\ddot{S}_n = k(S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}) \\ S_{N+1} = 0 \\ S_0 = x_0 \cos\omega t \end{cases}$$

$$S_n = C_n \cos\omega t \qquad -m\omega^2 C_n = k(C_{n-1} - 2C_n + C_{n+1})$$

$$C_n = Ae^{in\theta} \qquad -m\omega^2 = k(2\cos\theta - 2)$$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 4\sin^2\frac{\theta}{2} \leq 1$$

$$\omega^2 = 4\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

معادله‌ی پاشندگی

دو حالت داریم : $\omega > \omega_0$ ، $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 > \omega$

حالت $\omega < \omega_0$:

$C_n = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}$

$C_{N+1} = 0 \rightarrow Ae^{i(N+1)\theta} + Be^{-i(N+1)\theta} = 0$

$S_0 = x_0 \cos\omega t \qquad B = -Ae^{2i(N+1)\theta} \rightarrow A(1 - e^{2i(N+1)\theta}) = x_0$

$C_0 = x_0$

$A = \dfrac{x_0}{1 - e^{2i(N+1)\theta}} \qquad B = -\dfrac{x_0 e^{2i(N+1)\theta}}{1 - e^{2i(N+1)\theta}}$

$C_n = \dfrac{x_0}{1 - e^{2i(N+1)\theta}} e^{in\theta} - \dfrac{x_0}{1 - e^{2i(N+1)\theta}} e^{2i(N+1)\theta} e^{-in\theta}$

$= \dfrac{x_0 e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{2i(N+1)\theta}} \underbrace{\left(e^{-i\theta(N+1+n)} - e^{i\theta(N+1-n)}\right)}_{z} = \dfrac{x_0}{e^{-i(N+1)\theta} - e^{i(N+1)\theta}} (z)$

$= \dfrac{x_0}{-2i\sin(N+1)\theta}\left[-2i\sin(N+1-n)\theta\right] = \dfrac{x_0 \sin(N+1-n)\theta}{\sin(N+1)\theta}$

$$\boxed{S_n = \frac{x_0 \sin(N+1-n)\theta}{\sin(N+1)\theta} \cos\omega t}$$

چرا این کسر برابر با بسامد طبیعی شد؟

در θ_s دامنه بی‌نهایت میشه ($\omega = \omega_0$)

انتظار تشدید داریم.

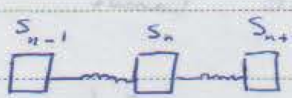
این جواب فقط به ازای C_n هست.

بدست آوردن بسامد طبیعی : (نیرو نداریم) $\sin(N+1)\theta = 0$

* $e^{i(N+1)\theta_s} - e^{-i(N+1)\theta_s} = 0$

جواب کلی : $S_n = 2\dfrac{x_0 \sin(N+1-n)\theta}{\sin(N+1)\theta}\cos\omega t$

به عنوان ترین سمت راست رو باز کنیم وصل کنیم.



* می‌خوایم ببینیم به جسم nاُم چند نیرو وارد شده؟

از سمت چپ

$dE^{(\rightarrow, n)} = -k(S_n - S_{n-1})\,dS_n \qquad dE^{(n, \leftarrow)} = k(S_{n+1} - S_n)\,dS_n$

$\dfrac{dE^{(\rightarrow, n)}}{dt} = -k(S_n - S_{n-1})\dot{S}_n \qquad \dfrac{dE^{(n, \leftarrow)}}{dt} = k(S_{n+1} - S_n)\dot{S}_n$

$$\frac{d}{dt}\left[E^{(n,\rightarrow)} + E^{(n,\leftarrow)}\right] = K\left[S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n\right]\dot{S}_n = m\ddot{S}_n \dot{S}_n$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m \dot{S}_n^2\right]$$

برای موج روان فقط یکی از این موج ها رو داریم.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = my \begin{cases} m = -\alpha^2 < 0 & : y = e^{i\alpha y}, e^{-i\alpha y} \\ m = \beta^2 > 0 & : y = e^{\beta y}, e^{-\beta y} \end{cases}$$

در این حالت $\omega > \omega_0$ یعنی $\sin^2\theta > 1$ رو در نظر می‌گیریم. $\sin$ در حالت مختلط میتونه بزرگتر از ۱ باشه

$$S_n = C_n \cos\omega t \qquad -m\omega^2 C_n = K\left(C_{n+1} - 2C_n + C_{n-1}\right)$$

$$C_n = Ae^{n\varphi}$$

$$-m\omega^2 Ae^{n\varphi} = Ak\left(e^{(n+1)\varphi} - 2e^{n\varphi} + e^{(n-1)\varphi}\right)$$

$$-m\omega^2 = k\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi} - 2\right) = 2k(\cosh\varphi - 1) = 4k\sinh^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2\, 4\sinh^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\omega > \omega_0 : \quad C_n = Ae^{n\varphi} + Be^{-n\varphi} \qquad \begin{cases} A + B = x_0 \\ Ae^{(N+1)\varphi} + Be^{-(N+1)\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{x_0}{1 - e^{2(N+1)\varphi}}$$

$N \rightarrow \infty : A \rightarrow 0$ اگر به طور نامحدودی انتهای ریسمان رو دور کرده که و در ∞ دامنه زیاد نشه (از نظر فیزیکی معنادار)

$$C_n = Be^{-n\varphi} \qquad B = x_0 \qquad S_n = x_0 e^{-n\varphi}\cos\omega t$$

$$B = \frac{-x_0 e^{2(N+1)\varphi}}{1 - e^{2(N+1)\varphi}} \qquad \lim_{N\to\infty} B = x_0$$

حالت کلی

$$C_n = \frac{x_0 \sinh(N+1-n)\varphi}{\sinh(N+1)\varphi}$$

در حالتی که طول اندازه متناهی و یکسان دارن بین نوسان یکی عقب‌تر از اون یکی میشه.

جهت موج طولیه.

$$\sum m_k S_k = MS_{cm}$$

در مورد ... که ... حالت ... بودن ... داشته ... $S_1 = S_2 = 0$

جلسه‌ی هشتم

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

اگر با فنر جرم‌ها را به هم وصل کنیم (انرژی بدیم) همه جرم‌ها جنبش می‌شه

اگر فنرها منحرف شده باشند ، $x_{C.M} = \frac{l_0 N(N-1)}{2}$. مرکز جرم ثابت می‌ماند.

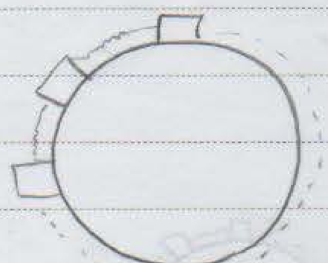
$$N m x_{c.m} = m s_1 + m(s_2 + l_0) + m(s_3 + 2l_0) + \dots + m(s_N + (N-1)l_0)$$

$$N x_{C.M} = \sum_{n=1}^{N} s_n + l_0 \sum_{1}^{N-1} n = \sum_{n=1}^{N} s_n + \frac{l_0 N(N-1)}{2}.$$

$\longrightarrow$ سرعت مرکز جرم $\quad N \dot{x}_{C.M} = \sum \dot{s}_n$

if : $\dot{s}_n = 0 \longrightarrow$ سرعت مرکز جرم صفر $\rightarrow$ مکان مرکز جرم تغییر نمی‌کند

مثل اینکه در چارچوب مرکز جرم باشیم



این جوابها برای حلقه در بسته:

در دستگاهی قرار می‌گیریم که سرعت زاویه‌ای صفر باشه.

$$\sum \dot{s}_n = \sum (A e^{in\theta_s} + B e^{-in\theta_s}) e^{i\omega t} + \sum (A' e^{+in\theta_s} + B' e^{-in\theta_s}) e^{-i\omega t} = 0$$

$$\theta_s = \frac{2\pi s}{N}$$

$m\ddot{x} = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) \longrightarrow -m\omega^2 C_n = k(C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n) \qquad \omega_s^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{\theta_s}{2}$

$$C_n = A e^{in\theta} + B e^{-in\theta}$$

$x_0 = x_1 \rightarrow \boxed{A(1 - e^{i\theta}) = B e^{-i\theta}(1 - e^{i\theta})}$

$x_N = x_{N+1} \rightarrow \boxed{A e^{iN\theta}(1 - e^{i\theta}) = B e^{-i(N+1)\theta}(1 - e^{i\theta})}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دو سر حالت خطی دو سر باز

$$\begin{cases}(A - Be^{-i\theta})(1-e^{i\theta})=0 \\ (Ae^{iN\theta} - Be^{-i(N+1)\theta})(1-e^{i\theta})=0\end{cases}$$

$$e^{i\theta} = e^{2\pi i s} \longrightarrow \omega_s^2 = 4\omega_0^2 \sin^2(\pi s) \longrightarrow \boxed{\omega_s = 0}$$

شرط ابتدایی : $A = Be^{-i\theta}$ $\quad Be^{i(N-1)\theta} - Be^{-i(N+1)\theta} = 0 \longrightarrow N\theta = \pi s$ $\boxed{\theta = \frac{\pi s}{N}}$

$$\sum S_n = 0 \qquad S_n = \underbrace{(A_s e^{in\theta_s} + B_s e^{-in\theta_s})}e^{i\omega t} + \underbrace{(A'_s e^{in\theta_s} + B'_s e^{-in\theta_s})}e^{-i\omega t}$$

ضرایب باید صفر باشند

$$\sum_n \sum_s \left(A_s e^{\frac{in\pi s}{N}} + B_s e^{\frac{-in\pi s}{N}}\right) = 0$$

برای دو جسم داریم :

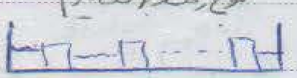
$N=2$
$n=1,2$
$\omega_1 = 0$
$\omega_2 = 2\omega_0 \sin\pi/4 = \sqrt{2}\,\omega_0$

برای حالت دو جسم

الر $N=2$

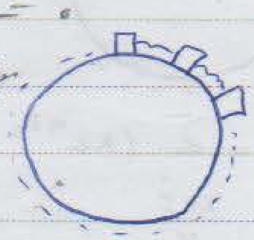
$$A_1 e^{i\pi/2} + B_1 e^{-i\pi/2} + A_1 e^{i\pi} + B_1 e^{-i\pi} = 0$$

موج متحرک نداریم



موج رفت و برگشت داریم

موج متحرک فقط داریم.



مشترک $m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$

$\left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_{N+1} = 0 \end{array}\right.$ $\qquad \left| \begin{array}{l} x_0 = x_1 \\ x_N = x_{N+1} \end{array}\right.$ $\qquad \left| \, x_{N+n} = x_n \right.$

مشترک $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin\frac{\theta_s}{2}$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\qquad x_n = C_n e^{i\omega t} + C'_n e^{-i\omega t}$

$C_n = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}$

$\theta_s = \frac{s\pi}{N+1}$ $\qquad \theta_s = \frac{s\pi}{N}$ $\qquad \theta_s = \frac{2\pi s}{N}$

Subject:
Year. Month. Date. 12

جلسه نهم

برای دو سر بسته

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_{N+1} = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} & A + B = 0 \longrightarrow A = -B \\ & Ae^{i(N+1)\theta} + Be^{-i(N+1)\theta} = 0 \end{aligned}$$

$$\sin(N+1)\theta = 0 \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{s\pi}{N+1} \\ B = -A \end{cases}$$

برای دو سر باز

$$C_0 = C_1 \longrightarrow A + B = Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta}$$

$$C_N = C_{N+1} \longrightarrow Ae^{iN\theta} + Be^{-iN\theta} = Ae^{i(N+1)\theta} + Be^{-i(N+1)\theta}$$

$$(A - Be^{-i\theta})(1 - e^{i\theta}) = 0$$

$$(Ae^{iN\theta} - Be^{-i(N+1)\theta})(1 - e^{i\theta}) = 0 \qquad e^{i\theta} = 1 \longrightarrow C_n = A + B$$ وابستگی به n ندارد

$$* \; A = Be^{-i\theta} \qquad e^{i(N-1)\theta} - e^{-i(N+1)\theta} = 0 \qquad e^{iN\theta} - e^{-iN\theta} = 0$$

$$\sin N\theta = 0 \qquad N\theta_s = s\pi \qquad \theta_s = \frac{s\pi}{N}$$

$$C_n = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta} \xrightarrow{*} C_n = Ae^{in\theta} + Ae^{-i(n-1)\theta} = Ae^{i\theta/2}\left(e^{i(n-\frac{1}{2})\theta_s} + e^{-i(n-\frac{1}{2})\theta_s}\right)$$

$$= \bar{A}\cos(n-\tfrac{1}{2})\theta_s$$

$$x_n = \sum_s (Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta})e^{i\omega t} + (A^*e^{-in\theta} + B^*e^{in\theta})e^{-i\omega t}$$

جواب مزدوج

$$x_{n,s} = \cos(n-\tfrac{1}{2})\theta_s\left[\bar{A}e^{i\omega t} + \bar{A}_s^* e^{-i\omega t}\right] \to (\alpha+i\beta)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (\alpha - i\beta)(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$= \cos(n-\tfrac{1}{2})\theta_s\left[E_s\cos\omega t + F_s\sin\omega t\right]$$

این دو جمله از هم جدا هستن واسه همین جمع استفاده داد.

مطابق یکی جواب رو میدیم

$$\vec{P}_n = \frac{dE^+}{dt} = k(x_{n+1} - x_n)\frac{dx_n}{dt} = k\left(\cos(n+\tfrac{1}{2})\theta - \cos(n-\tfrac{1}{2})\theta\right)E_s\cos\omega t(\omega E_s \sin\omega t)$$

$$= -2k\omega_s E_s^2 \sin n\theta \sin\theta/2 \cos\omega t \sin\omega t$$

انرژی متوسط صفره در یک جهت.

$$\bar{P} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_s}}\int_0^{2\pi/\omega_s} P^+(t)\,dt = 0$$