هستند که ما بین هادیها و عایقها قرار دارند . این مواد را نیمه هادی گویند (مثــــلاً Germanium , Silicon) . در نیمه هادیها با اضافه کردن مقدار خیلی کمی (حدود یک در صد هزار) از عناصر دیگر مثلاً ارسنیک میتوان هدایت الکتریکی را افزایش داد . از نیمه هادیها در ساختمان ترانزیستور استفاده میشود ؛ برای فهم کامل هدایت الکتریکی باید از فیزیک کوانتیک استفاده کرد .

قانون کولــــب : در سال ۱۷۸۵ کولمب نیروئی را که دو بار الکتریکی بهم دیگر وارد میکنند اندازه گرفت و باین نتیجه رسید که اگر دو بار الکتریکی ساکن q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر قرار داشته باشند نیروئی که هریک بر دیگری وارد میکند اولاً متناسب است با q_1 و q_2 وثانیاً متناسب است با عکس مجــــذور فاصله آنها ($\frac{1}{r^2}$) بنابراین

$$\vec{F}_1 = K \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_2$$

در این رابطه K ضریب تناسب و $\vec{F}_1$ نیروی وارد بر q_1 و $\hat{r}_{12}$ بردار واحد بسمت در امتداد خطی که q_2 را به q_1 وصل میکند . $\vec{F}_2$ یعنی نیروئی که q_1 بر q_2 وارد میکند برابر $-\vec{F}_1$ است .

در سیستم CGS واحد بار الکتریکی را طوری تعریف میکنیم که $K = 1$ باشد . در سیستم MKS واحد نیرو نیوتن ، واحد بار الکتریکی کولمب ، و واحد طول متر است و چون

یک نیوتن $= 10^5$ dyns

یک متــر $= 10^2$ cm

واحد بار الکتریکی در سیستم MKS $= 3 \times 10^9 \times$ واحد بار الکتریکی در سیستم CGS

بنابراین در سیستم MKS داریم

$$k = 9 \times 10^{9} \frac{\text{نیوتن - متر}^2}{(\text{کولمب})^2}$$

ازنظر تاریخی معمولاً K را بصورت $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ مینویسند ، پس داریم

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^{9} \frac{nt - m^2}{Coul^2}$$

یکی ازمزایای نوشتن K بصورت فوق اینستکه فاکتور 4π ازغالب فرمولهای مهم الکتریک، حذف میشود .
اگرچندین بارالکتریکی داشته باشیم تجربه نشان میدهدکه نیروئی که روی یکی ازآنها مثلاً q_1 وارد میشود برابراست با برآیند نیروهائی که ازطرف بارهای q_2 و q_3 وغیره برآن وارد میشود :

$$\vec{F_1} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{13}} + \cdots$$

که درآن مثلاً $\vec{F_{13}}$ نیروئی است که بار q_3 بر q_1 وارد میکند . بعبارت دیگرنیروئی که دوباربریکدیگر وارد میکنند مستقل ازوجود سایربارهااست . این مطلب باسم اصل ترکیب (Superposition) موسوم است .

کوانتیزیشن بارالکتریکی

درزمان فرانکلین فکرمیشد که بارالکتریکی یک سیال است . تجربه نشان مید هد که بارالکتریکی یک کمیت پیوسته نیست وبلکه میتواند بصورت ضرائب درستی ازیک مقداری نیم وجود داشته باشد . این مقداری نیم برابراست با 1.6210×10^{-19} کلمب وماآنرا بصورت e نشان مید هیم . هربار q بایستی بصورت $q = ne$ باشد که درآن n یک عدد درست مثبت یامنفی است . هرگاه کمیتی نظیربارالکتریکی بصورت منفصل یافت شود درزبان فیزیک امروزی گوئیم آن کمیت کوانتیزه است . مثلاً بارالکتریکی الکترن برابر $-e$ وبارالکتریکی پروتون برابر $+e$ است . اینکه بارالکتریکی این دو دقیقاً برابراست توسط آزمایشهای متعددی تائید شده است مثلاً دریک آزمایش اتمهای سزیم رادرخلاء ازیک میدان الکتریکی عبورداد ند ولی هیچگونه انحرافی درحرکت آنها مشاهده نشد . این نشان مید هد که اتم سزیم ازنظرالکتریکی خنثی است و درحقیقت آزمایشگران برمبنای نتایج آزمایش مذکورنتیجه گرفتند که تفاوت بارالکتریکی الکترون وپروتون کمتراز $10^{-16}e$ است . یک آزمایش دقیقتر نشان مید هد که تفاوت باراین دوذره کمتراز $10^{-20}e$ است .

بقاء بارالکتریکی : اگریک میله شیشه ای رابیک تکه پارچه ابریشمی بمالیم مقداری بار مثبت روی میله جمع میشود . تجربه نشان مید هد که همین مقداربارمنفی روی پارچه ابریشمی جمع میشود . این نشان مید هد که درا ثرمالش بارخلق نمیشود بلکه ازیک شئی بشئی دیگرمنتقل میشود تجربیاتی که روی قانون بقاء بارشده ما را باین نتیجه منتهی شده اند که بارالکتریکی خلق ویانابود نمیشود . تجربه نشان مید هد که هنگامیکه یک بارمثبت $+Q$ خلق میکنیم همراه آن یکبار $-Q$ ایجاد میشود واگربارمثبت $+Q$ ازبین برود بار $-Q$ نیزازبین میرود . مثلاً درطبیعت اتمی وجود دارد باسم پوزیترونیوم که ازیک الکترن ویک پوزیترون (ذره ای است باجرم الکترن که دارای

بارشش برابر بارالکترن میباشد) تشکیل شده است . پس اززمان کوتاهی الکترن وپوزیترون از بین رفته وتولید اشعه γ میکنند که بدون بار است :

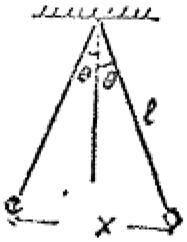
$$e^{+} + e^{-} \longrightarrow \gamma + \gamma$$

دراین فعل وانفعال e^{-} الکترون e^{+} پوزیترون و γ فوتون (ذره بدون بار) است .

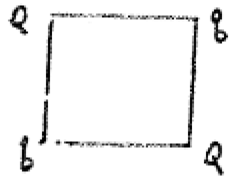
باروساده : ماده معمولی ازسه ذره بنیادی درست شده است : پروتون ، نوترون والکترن . پروتون ونوترون درهسته هستند والکترنها حول آنها درحرکت میباشند . قطرهسته بطورمتوسط درحدود $5 \times 10^{-15}\,m$ وقطراتم درحدود $2 \times 10^{-10}\,m$ است یعنی شعاع اتم درحدود 10^{5} برابرشعاع هسته است .

مسائل فصل اول

۱- دو گلوله مشابه بجرم m وبار q توسط نخهای ابریشمی بطول l ازیک نقطه آویزان شده اند. فاصله بین گلوله ها را در حال تعادل پیدا کنید. برای سهولت در حل مساله فرض کنید θ آنقدر کوچک است که $\tan\theta \simeq \sin\theta$



۲- در شکل زیر (مربع) برای آنکه نیروی وارد ببار Q صفر باشد بین بارهای q و Q چه رابطه ای باید برقرار باشد.



۳- بار Q را بدو قسمت q و $Q-q$ تقسیم کرده وآنها را در فاصله معین r قرار میدهیم. بازاء چه مقدار q نیروی دافعه بین این دو ماکزیمم است.

۴- دو بار q و $4q$ بفاصله l ازیکدیگر قرار دارند حال یک بار Q وارد میکنیم اندازه ومحل بار را طوری تعیین کنید که سیستم کل در حال تعادل باشد.

۵- یک ذره ببار $-q$ وجرم m در روی یک دایره بدور بار مثبت $+Q$ حرکت میکند نشان دهید که بین شعاع r این دایره وپریود این حرکت (T) رابطه زیر برقرار است

$$r^3 = \frac{Qq}{16\pi^3\epsilon_0 m}T^2$$

۶ـ مقدار الکتریسیته مثبت موجود در یک لیتر آب را حساب کنید .

۷ـ بار Q را بطور یکنواخت در حجم کره‌ای بشعاع R پخش کرده‌ایم . مقدار بار موجود در کره‌ای بشعاع $R/2$ چقدر است ؟

۸ـ یک حلقه دایره‌ای بشعاع 3cm داریم که در روی آن بار $Q = 10^{-3}$ Coul بطور یکنواخت پخش شده است . اگر در مرکز این حلقه بار $Q = 10^{-2}$ Coul را قرار دهیم چه نیروئی بآن وارد

فصــــل دوم

میدان الکتریکی

بارهای q_1 ، q_2 ، .... و q_n را در نظر میگیریم . نیروئی که این بارها بریك بار q_0 وارد میکنند برابر است با

$$\vec{F_0} = \sum_{j=1}^{n} k \frac{q_0 q_j}{r_{0j}^2} \hat{r}_{0j}$$

که در آن $\hat{r}_{0j}$ بردار واحدی در امتداد خطی است که بار q_j را بنقطه (X,Y,Z) محل بار q_0 وصل میکند . چنانکه می بینیم این نیرو متناسب با q_0 است . اگر آنرا بر q_0 تقسیم کنیم برداری بدست میآید که آنرا میدان الکتریکی در نقطه (X,Y,Z) گویند و به $\vec{E}$ نشان میدهند .

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^{n} \frac{k q_j}{r_{0j}^2} \hat{r}_{0j}$$

پس میتوان نوشت

$$\vec{F_0} = \vec{E} q_0$$

در این رابطه $\vec{E}$ را میتوان بدو نحو تعبیر کرد یکی اینکه $\vec{E}$ فاکتوری است که اگر در q_0 ضرب شود نیروی وارد بر q_0 را میدهد . بعبارت دیگر $\vec{E}$ نیروی وارد بر واحد بار است . دیگر آنکه $\vec{E}$ معرف تغییراتی است که بارهای q_1 ، q_2 ، ... q_n در فضای اطراف خود ایجاد میکنند بعلت این تغییرات است که اگر بار q_0 در این محیط قرار گیرد بآن نیرو وارد میشود . در تعبیر اول معادله نیرو بین دو بار الکتریکی آنی است . در تعبیر دوم بار q_1 یك میدان الکتریکی در اطرافش ایجاد میکند و آنگاه این میدان روی بار q_0 اثر میگذارد و این تاثیر همان نیروئی است که به q_0 وارد میکند . البته اگر مسائل الکترومغناطیسی منحصر به نیروی مابین بارهای ساکن بود این دو نظر معادل میبودند ولی هنگامی که بارهای در حال حرکت را در نظر بگیریم این دو نظر به

معادل نیستند. مثلاً اگر q_1 بسوی q_0 شتاب پیدا کند بنابنظریه اول q_0 بلافاصله درمییابد که q_1 حرکت کرده ونیروی وارد برآن زیاد شده است وحال آنکه بنابرنظریه دوم q_0 درباره حرکت q_1 بوسیله اختلالی (میدانی) که از q_1 سرچشمه گرفته وبا سرعت نور حرکت میکند با اطلاع میشود. تجربه نظریه دوم راتأئید میکند. الکترونهای شتابدار یک آنتن فرستنده روی الکترونها یک آنتن گیرنده که بفاصله l ازاولی قرارگرفته پس اززمان $\frac{l}{c}$ تاثیرمیگذارند.

معمولاً میدان الکتریکی رابدوطریق تعریف میکنند. یکی ازروی رابطه

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

دراین تعریف فرض میشود که بار q_0 بسیارکوچکست. چه اگر q_0 بزرگ باشد خود q_0 روی بارهای اولیه تاثیرمیگذارد وبنابراین میدان ناشی ازآنهاراتغییرمیدهد وبالنتیجه معادله فوق رادرحقیقت باید بصورت زیرنوشت

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

چون درحقیقت باری کوچکتراز e وجود ندارد این تعریف خالی ازتصنع نیست. تعریف دیگرمیدان الکتریکی ازروی رابطه

$$E(x,y,z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{k\, q_j\, \hat{r}_{0j}}{r_{0j}^2}$$

میباشد. دراین تعریف $\vec{E}$ رابدون راجعه به بارآزمایشی q_0 تعریف کرده ایم واگروارد کردن این بارسبب جابجائی بارهای q_1 ، q_2 و ... شود دراینصورت میدان الکتریکی تغییرمیکند ومیدان الکتریکی واقعی میدانی است که بادرنظرگرفتن وضع جدید بارهای q_1 ، q_2 و ... q_n محاسبه میشود.

چنانکه از تعریف فوق برمیآید میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 ، q_2 ، ... ، q_n برابر است با

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_i + \cdots + \vec{E}_n$$

که در آن $\vec{E}_i$ میدان الکتریکی ناشی از بار q_i است . حال اگر یک توزیع پیوسته بار الکتریکی داشته باشیم ابتداء میدان ناشی از عنصر dq را حساب میکنیم وسپس انتگرال میگیریم تا $\vec{E}$ بدست آید

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

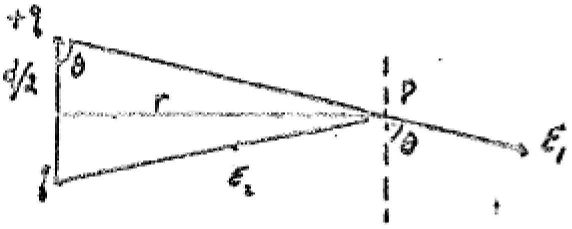
اگر بار الکتریکی با دانسیته $\rho(\vec{r})$ توزیع شده باشد در اینصورت $dq = \rho\, dV$ ولذا میتوان نوشت (dq مقدار بار الکتریکی در حجم dV است)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dV'$$

مثال ۱ میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی :

یک سیستم متشکل از دو بار $+q$ و $-q$ راکه درفاصله d از یکدیگر قرار گرفته اند یک دوقطبی الکتریکی گویند . خط واصل بین دو بار محور دوقطبی نامیده میشود . میخواهیم میدان الکتریکی را در نقطه P واقع برمحور منصف محور دوقطبی حساب کنیم . بنابه تقارن میدان الکتریکی درامتداد محور دوقطبی است چه مؤلفه های میدان درامتداد عمود منصف محور دوقطبی همدیگر را خنثی میکنند .

بنابراین



$$E = E_1 \cos\theta + E_2 \cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\cos\theta}{r^2 + d^2/4} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\cos\theta}{r^2+d^2/4}$$

$$= \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\cos\theta}{r^2+d^2/4} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2+d^2/4}\,\frac{d/2}{\sqrt{r^2+d^2/4}}$$

$$= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 (r^2+d^2/4)^{3/2}}$$

اگر $r \gg d$ باشد خواهیم داشت

$$E \simeq \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

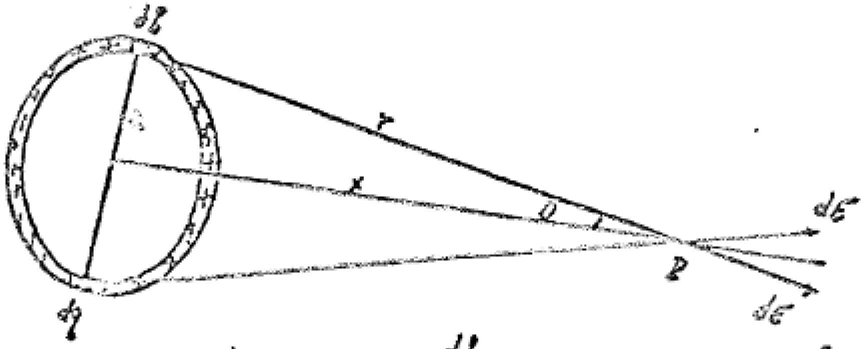
این فرمول نشان میدهد که E بستگی بحاصلضرب d در q دارد نه به تک تک آنها . این حاصلضرب را ممان دوقطبی الکتریکی گویند وآنرا به p نمایش میدهیم بنابراین

$$E \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{p}{r^3}$$

میدان الکتریکی ناشی ازیکعده سیستمهای فیزیکی برای نقاط دوردست بشکل فوق میباشد . بعبارت دیگراین سیستمها حکم یک دوقطبی الکتریکی را دارند .

مثال ۲ : توزیع پیوسته بار بر روی یک حلقه :

درانیجا هم بنابتقارن میدان در امتداد محورحلقه است . بنابراین ما مولفه میدان درامتداد محور راحساب میکنیم .



$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (x^2+a^2)} \quad , \quad dq = \frac{q}{2\pi a}\, ds$$

درانیجا ds طول قوس کوچکی ازدایره ، dq بارموجود درآن و dE میدان الکتریکی ناشی ازآن

درنقطه P است .

$$E = \int dE \cos\theta \qquad , \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\, ds}{(2\pi a)(a^2+x^2)} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(2\pi a)(a^2+x^2)^{3/2}} \int ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

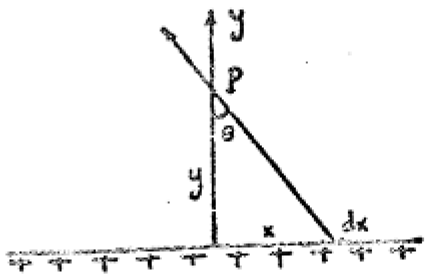
والبته E درامتداد محور X است .

برای $x \gg a$ داریم $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2}$ واین همان چیزیست که انتظارداریم چه برای

فواصل زیاد حلقه باردار شبیه یکبارنقطه ای عمل میکند .

۳— توزیع بار روی یک خط بینهایت طویل :

دراین مسا له هم بنابتقارن میدان درامتداد خط عمود برامتداد توزیع باراست .



$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (y^2+x^2)} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\epsilon_0 (y^2+x^2)}$$

در اینجا dx قسمت کوچکی از خط، dq بار موجود در آن و dE میدان ناشی از آن در نقطه P است.

چون

$$x = y\tan\theta$$

بنابراین

$$dx = y\sec^2\theta\, d\theta$$

و در نتیجه

$$E = \int dE\cos\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}\cos\theta$$

$$E = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{y^2(1+\tan^2\theta)}\cos\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

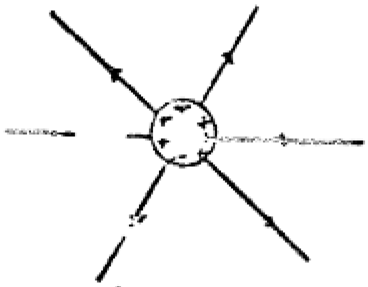
این نتیجه که ما برای یک خط بینهایت طویل بدست آورده‌ایم برای حالتی هم که طول خط محدود ولی نقطه P از دو انتهای خط دور و بسیار به خط نزدیک است با تقریب خوبی صادق میباشد.

خطوط نیرو

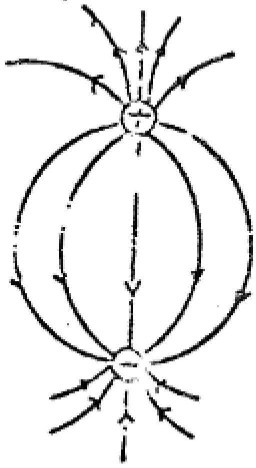
چنانکه در بالا متذکر شدیم یک سیستم بار الکتریکی، در فضای اطراف خود یک میدان الکتریکی ایجاد میکند. به عبارت دیگر به هر نقطه (x,y,z) از این فضا یک بردار $\vec{E}(x,y,z)$

تعلق میگیرد . یکی از راههای نشان دادن طرز تغییرات میدان الکتریکی استفاده از خطوط نیرو است . بنا بتعریف خطوط نیرو خطوطی هستند که مماس بر آنها در هر نقطه میدان الکتریکی در آن نقطه را میدهد . بنا بقرارداد خطوط نیرو را طوری رسم میکنیم که تعداد آنها در واحد سطح یک ناحیه متناسب با اندازه میدان الکتریکی $\vec{E}$ در آن ناحیه باشد پس در نقاطی که خطوط نیرو بهم نزدیک هستند E بزرگ است .

مثال ۱ : خطوط نیروی ناشی از یک کره با بار مثبت



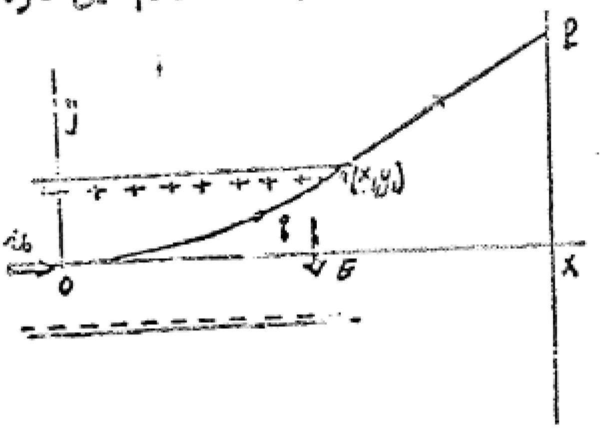
مثال ۲ : خطوط نیروی ناشی از یک دو قطبی الکتریکی



حرکت یک ذره باردار در میدان الکتریکی

یکذره با بار q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ تحت تاثیر نیروی $\vec{F}=q\vec{E}$ قرار دارد و در اثر این نیرو شتابی برابر $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{q\vec{E}}{m}$ پیدا میکند . با استفاده از قانون دوم نیوتن میتوان با دانستن $\vec{E}$ شتاب و بالنتیجه مسیر ذره را تعیین نمود .

مثال : حرکت یکذره باردار در یک میدان الکتریکی یکنواخت . فرض میکنیم یک الکترن با سرعت $\vec{v}_0$ وارد یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ شود ($\vec{v}_0$ عمود به $\vec{E}$) . به بینیم این ذره چه انحرافی پیدا میکند



شتابی که ذره در اثر نیروی الکتریکی پیدا می‌کند برابر است با

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$$

چون میدان الکتریکی یکنواخت است شتاب هم ثابت است و در این حرکت متشابه التغیر در امتداد (y) ذره باندازه

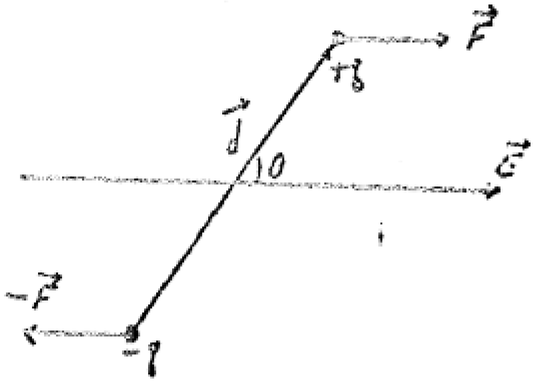
$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{eE}{2m}t^2$$

ازمسیر اولیه اش انحراف پیدا میکند . ازطرف دیگر در امتداد محور x ذره باندازه $x = v_0 t$ حرکت میکند . اگر t را بین این دو حذف کنیم معادله زیر برای حرکت الکترن بدست میآید .

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$$

بنابراین الکترن در داخل میدان الکتریکی در روی یک سهمی حرکت میکند . پس ازنقطه (x_1, y_1) دیگر الکترن تحت تاثیر نیروی الکتریکی نیست و بنابراین در امتداد یک خط مستقیم حرکت میکند (در این جا ازنیروی جاذبه زمین بعلت کوچک بودن آن صرفنظر شده است) .

یک دوقطبی الکتریکی درمیدان الکتریکی : یک دوقطبی الکتریکی درنظر میگیریم . اگر این دو قطبی را در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار دهیم نیروی خالصی بآن وارد نمیشود ولی یک کوپل بآن وارد میشود که برابر است با



$$\vec{\tau} = \vec{d}/_2 \times \vec{F} + (-\vec{d}/_2)\times(-\vec{F}) = \vec{d}\times\vec{F}$$
$$= \vec{d}\times q\vec{E} = q\,\vec{d}\times\vec{E}$$

چنانکه قبلاً دیده ایم $q\vec{d}$ را ممان دوقطبی الکتریکی گویند و به $\vec{p}$ نشان میدهند . بنا بتعریف جهت $\vec{p}$ از بار منفی به بار مثبت است . حال میتوان نوشت

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$

تحت تاثیر این کوپل دوقطبی در جهت حرکت عقربه های ساعت میچرخد . هنگامی که دوقطبی باندازه $d\theta$ در جهت حرکت عقربه های ساعت میچرخد انرژی آن باندازه

$dW = F\,dx$ بطوریکه $\qquad dW = \tau\, d\theta = pE\sin\theta\, d\theta$

کم میشود . پس اگر دوقطبی از وضع اولیه θ_0 بوضع θ درآید تغییر انرژی آن برابر است با

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} pE\sin\theta\, d\theta$$

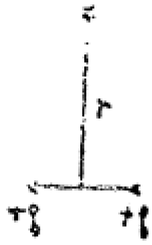
اگر فرض کنیم انرژی سیستم در وضع $\theta_0 = \pi/2$ صفر است انرژی آن در وضع θ برابر است

$$W = \int_{\pi/2}^{\theta} pE\sin\theta\, d\theta = pE\int_{\pi/2}^{\theta}\sin\theta\, d\theta$$
$$= -pE\left[\cos\theta\right]_{\pi/2}^{\theta} = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

مسائل فصل دوم

۱ـ دو بار مثبت و منفی بفاصله ۱۰ سانتی ازیکدیگر قرار گرفته اند . درصورتیکه مقدار هریک ازدو بار برابر 2.0×10^{-7} کولمب باشد میدان الکتریکی را در نقطه وسط دو بار پیدا کنید . اگر یک الکترن در این نقطه قرار بگیرد چه نیروئی بآن وارد میشود و در چه جهت ؟

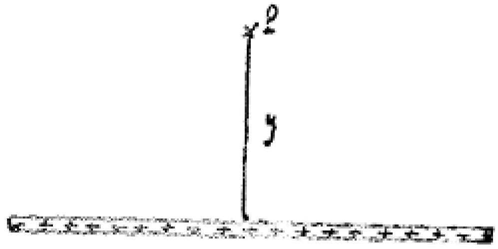
۲ـ دو بار مثبت q در فاصله $2a$ ازیکدیگر قرار گرفته اند . میدان الکتریکی را در نقطه P واقع برروی عمود منصف خط واصل بین دو بار حساب کنید و نشان دهید که برای $r \gg a$ این میدان بوسیله عبارت زیر داده میشود



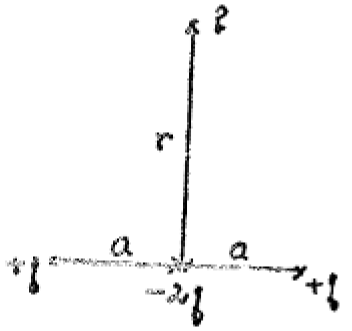
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}$$

این مساله را با مساله دوقطبی الکتریکی مقایسه کنید . چرا در این حالت E با $\frac{1}{r^2}$ تغییر میکند در صورتیکه در مورد دوقطبی الکتریکی E با $\frac{1}{r^3}$ تغییر مینماید .

۳ـ بار الکتریکی q روی یک میله غیرهادی بطول l بطور یکنواخت پخش شده است . میدان الکتریکی را در نقطه P واقع برروی عمود منصف میله و بفاصله y از آن پیدا کنید . برای حد l میدان بچه صورتی درمیآید



۴ـ یک چهارقطبی الکتریکی راکه از چهار بار مطابق شکل زیر تشکیل شده است درنظر میگیریم . میدان الکتریکی را در نقطه P واقع برروی عمود منصف چهارقطبی و بفاصله r ازمرکز آن حساب کنید .



بفرض آنکه $r \gg a$ باشد نشان دهید

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

که در آن $Q = 2a^2 q$ را ممان چهارقطبی سیستم می‌نامند.

۵- چهار بار $+q$ ، $-q$ ، $+q$ و $-q$ که در رؤوس یک مربع به اضلاع a قرار گرفته‌اند تشکیل یک نوع چهارقطبی الکتریکی می‌دهند. از مرکز این مربع خطی موازی یکی از اضلاع رسم می‌کنیم و در روی آن نقطه P بفاصله R از مرکز را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که برای $R \gg a$ میدان الکتریکی در نقطه P برابر است با:

$$E = \frac{3a^2 q}{4\pi\epsilon_0 R^4}$$

(راهنمائی: در حل این مسئله چهارقطبی را بصورت دو تا دوقطبی الکتریکی در نظر بگیرید)

۶- قرص نازک دایره‌ای شکلی بشعاع a را بطور یکنواخت باردار کرده‌ایم. بفرض آنکه σ مقدار بار موجود در واحد سطح باشد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای واقع بر روی محور قرص و بفاصله r از مرکز آن حساب کنید.

۷- یک نیمکره توخالی نازک (غیرهادی) بشعاع a داریم که بار q بطور یکنواخت روی سطح آن پخش شده است. میدان الکتریکی را در مرکز نیمکره حساب کنید.

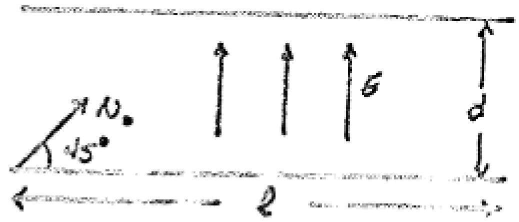
۸ــ یک میله شیشه‌ای را بصورت نیم دایره درآورده‌ایم ، در روی نصف این نیم دایره بار مثبت $+Q$ و در روی نیم دیگر آن بار $-Q$ بطور یکنواخت توزیع شده است ، میدان الکتریکی را در مرکز نیم دایره حساب کنید .

۹ــ در میدان الکتریکی یکنواخت $E = 10^6$ نیوتن/کولن چقدر طول میکشد تا سرعت یک الکترون از حالت سکون به $30000\ km/sec$ برسد ؟

$$eE = m\frac{dv}{dt} = m\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$eE = m\frac{v_2 - 0}{t_2 - 0} = m\frac{v}{t} \qquad t = 1{,}7\times10^{-10}\ \text{ثانیه}$$

۱۰ــ در شکل زیر یک الکترون با سرعت اولیه $v_0 = 6\times10^6\ m/sec$. و تحت زاویه $\theta = 45°$ وارد میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ میشود ، در صورتیکه $E = 2{,}0\times10^3$ نیوتن/کولن ، $l = 10\ cm$ و $d = 2{,}0\ cm$ باشد آیا این الکترون بهیچ کدام از صفحات برخورد میکند ؟ در صورتیکه جواب این سؤال مثبت است برخورد الکترون با کدامیک از صفحات صورت میگیرد و در چه مکانی ؟



۱۱ــ بار Q را بصورت زیر در حجم یک کره بشعاع R پخش کرده‌ایم :

$$\rho(r) = \text{دانسیته توزیع بار} = A(R - r) \qquad ; \quad 0 \leqslant r \leqslant R$$

(الف) ثابت A را برحسب Q و R تعیین کنید .

(ب) میدان الکتریکی را برای نقاط واقع در داخل و خارج کره محاسبه کنید .

فصل سوم

قانون گوس

فلوی الکتریکی

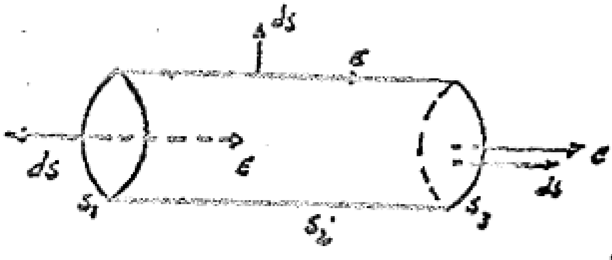
یک سطح بسته در یک میدان الکتریکی در نظر میگیریم . این سطح را به عناصر ΔS تقسیم میکنیم . ΔS را طوری کوچک میگیریم که تقریباً مسطح باشد . عمودی بطول ΔS برآن رسم میکنیم وآنرا $\vec{\Delta S}$ مینامیم . حال حاصلضرب اسکالر $\vec{E}.\vec{\Delta S}$ را برای تمام ΔS ها حساب میکنیم و باهم جمع میکنیم $\sum \vec{E}.\vec{\Delta S}$

در حالت حدی $\vec{\Delta S} \to \vec{dS}$ این جمع بانتگرال تبدیل میشود . بنابتعریف انتگرال $\oint \vec{E}.\vec{dS}$ را فلوی الکتریکی گویند .

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.\vec{dS}$$

علامت O روی $\int$ معنی اش اینستکه انتگرال در روی تمام سطح بسته حساب میشود .

مثال : یک استوانه بسطح مقطع A را در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وارد میکنیم فلوی الکتریکی خارج شونده ازسطح را حساب کنید .



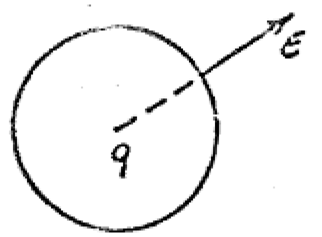
در اینجا سطح S از سه سطح S_1 و S_2 و S_3 تشکیل شده است . فلوی گذرنده ازسطح S_2 صفر است چه در این مورد میدان الکتریکی و عمود بر این سطح در هر نقطه از سطح برهم عمودند .

در مورد سطح S_3 میدان الکتریکی وعمود برسطح در یک جهت و در مورد سطح S_1 . این دو در خلاف جهت یکدیگر میباشند . بنابراین داریم :

$$\oint \vec{E}.\vec{dS} = \int_{S_1} \vec{E}.\vec{dS} + \int_{S_2} \vec{E}.\vec{dS} + \int_{S_3} \vec{E}.\vec{dS} = -\int_{S_1} E\,dS + 0 + \int_{S_3} E\,dS = -EA + EA = 0$$

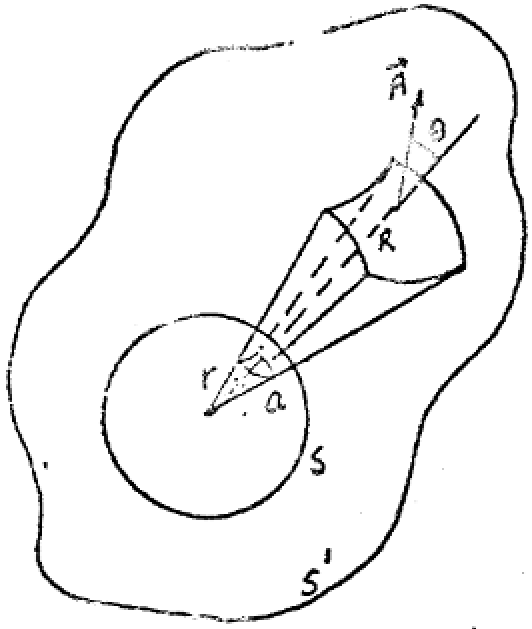
قانون گوس

یک بارنقطه ای مثبت q درنظرمیگیریم وبدورآن کره S بشعاع r رارسم میکنیم . میدان الکتریکی درهرنقطه ازسطح این کره برابراست با $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$ وبنابراین فلوی الکتریکی که ازاین سطح میگذرد برابراست با



$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2$$
$$= \frac{q}{\epsilon_0}$$

چنانکه می بینیم این فلومستقل ازاندازه کره است . حال یک سطح بزرگتر S' ولی غیرکروی بدور q درنظرمیگیریم . ثابت میکنیم فلوئی که ازاین سطح میگذرد بافلوئی که ازکره مذکورمیگذرد یکی است . برای اثبات مخروط کوچکی ازمحل q رسم میکنیم . مقطع این مخروط باکره وسطح S' رابترتیب a و A مینامیم . فرض کنیم فاصله q تامرکزمقطع A برابر R باشد وعمود براین مقطع زاویه θ باامتداد R بسازد . فلوی گذرنده ازاین دوسطح برابراست زیرا



فلوئی که ازسطح A میگذرد $= \vec{E}_R\cdot\vec{A} = E_R A\cos\theta$

فلوئی که ازسطح a میگذرد $= \vec{E}_r\cdot\vec{a} = E_r a$

حال اگرمیدان الکتریکی درروی مقاطع A و a رابترتیب با E_R و E_r نمایش دهیم درانصورت خواهیم داشت

$$E_R = E_r\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

ازطرف دیگرنسبت بین مساحت این دومقطع برابراست با

$$\frac{A\cos\theta}{a} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

بنابراین

$$E_R A\cos\theta = E_r\left(\frac{r}{R}\right)^2\frac{a}{\cos\theta}\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos\theta = E_r a$$

یعنی فلوئی که ازسطوح a و A میگذرد یکی است . حال اگرسطوح S و S' را باترسیم مخروطهائی نظیربالا بقسمتهائی نظیر a و A' تقسیم کنیم باین نتیجه میرسیم که فلوهائی که ازسطوح S و S' میگذرند برابرند وچون سطح S' رااختیاری درنظرگرفتیم بنابراین فلوئی که ازیك سطح باشکل واندازه دلخواه میگذرد برابراست با $\frac{q}{\epsilon_0}$. ازاینجامیتوان نتیجه گرفت که اگرباری درداخل یك سطح نباشد فلوی الکتریکی گذرنده ازآن سطح صفراست .

اگرچندین بار درداخل یك سطح داشته باشیم دراینصورت فلوئی که ازاین سطح میگذرد برابر است با

$$\Phi = \int \vec{\mathcal{E}} . \vec{ds} = \int (\vec{\mathcal{E}_1} + \vec{\mathcal{E}_2} + \dots + \vec{\mathcal{E}_n}) . \vec{ds}$$

$$= \int \vec{\mathcal{E}_1} . \vec{ds} + \dots + \int \vec{\mathcal{E}_n} . \vec{ds}$$

$$= \frac{q_1}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

دراینجا Q بارکل داخل سطح است . بنابراین فلوئی که ازیك سطح بسته میگذرد برابراست با $\frac{Q}{\epsilon_0}$ که درآن Q بارکل موجود درداخل سطح است :

$$\oint \vec{\mathcal{E}} . \vec{ds} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

این رابطه بقانون گوس موسوم است ما این قانون رابصورت نتیجه ای ازقانون کولمب بدست آوردیم . بالعکس قانون کولمب رامیتوان ازقانون گوس وبکمك ملاحظات تقارن بدست آورد .

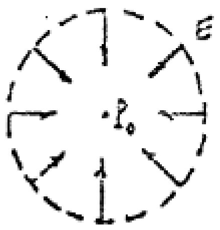
قانون گوس برای میدانهائی غیرازمیدان الکتروستاتیك نیزصادق است مثلاً برای یك میدان الکتریکی که متناسب باعکس مجذور r میباشد ولی تقارن کروی ندارد قانون گوس صادق است .

قانون گوس یکی ازقوانین اساسی تئوری الکترومغناطیس است (یعنی برای بارهای ساکن و متحرك صادق است) .

کاربردهای قانون گـــوس

(۱) تعادل دریک میدان الکترواستاتیک (قضیه Earnshaw)

با استفاده ازقانون گوس میتوان نشان داد که دریک میدان الکترواستاتیک ناشی ازبارهـــای q_1 ، ... و q_n هیچ نقطه تعادل پایداری برای یکبار q وجود ندارد وبعبارت دیگر برای یکبارالکتریکی که درمیدان الکتریکی ناشی ازبارهای دیگرقرارگرفته است نقطه تعادل پایدار وجود ندارد . برای اثبات فرض میکنیم بارالکتریکی مثبت q_0 درنقطه P_0 درحال تعادل باشد . دراینصورت میدان الکتریکی دراین نقطه صفراست . حال اگراین بارراکمی از P_0 جابجاکنیم برای آنکه نقطه P_0 نقطه تعادل پایدارباشد بایستی نیروئی ذره رابه P_0 برگرداند یعنی بایستی میدان الکتریکی دراطراف P_0 متوجه به P_0 باشد . دراینصورت فلوی الکتریکی که از یک سطح فرضی دراطراف P_0 میگذرد منفی است وبنابراین مطابق قانون گوس بایستی در P_0 بارهای منفی داشته باشیم . اگرباری در P_0 نباشد میدانی که فرض نمودیم ازقانون گوس تخلف میکند وبنابراین امکان ندارد



که یکبارمثبت دریک نقطه ازفضا بحال تعادل پایدارباشد مگر آنکه درآن نقطه بارمنفی موجود باشد . بعبارت دیگریکبارمثبت میتواند درحال تعادل باشد اگردرمیان یک عده بارمنفی قرار داشته باشد والبته خود بارهای منفی بایستی توسط نیروهای غیرالکتریکی درجایشان نگهداری شوند . این نتیجه که مابرای یکبارنقطه ای q بدست آورده ایم برای یک سیستم متشکل از بارهای الکتریکی که وضع ثابتی نسبت بیکدیگردارند نیزصادق است . همینطورمیتوان نشان داد که درمیدان ناشی ازیک هادی نیزنقطه تعادل پایداروجود ندارد .

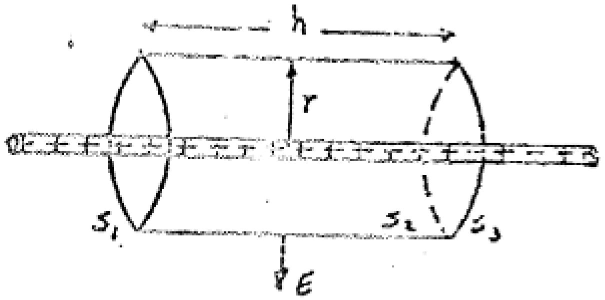
(۲) محاسبه میدان الکتریکی

با استفاده از قانون گوس میتوان در مواردیکه توزیع بار تقارن دارد میدان الکتریکی را حساب کرد .
در مواردیکه توزیع بار تقارن کافی ندارد بکاربردن قانون گوس مشکل است .

مثال ۱ : میدان الکتریکی حاصل از یک میله بینهایت طویل :

در اینجا سطح گوس را یک استوانه اختیار میکنیم بنابتقارن میدان الکتریکی عمود بر میله است . اگر دانسیته توزیع بار (بار موجود در واحد طول) روی میله λ باشد در اینصورت بنابقانون گوس داریم

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad ; \quad q = \text{بار درون در داخل استوانه}$$



$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \int_{S_3} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$0 + (2\pi r h)E + 0 = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

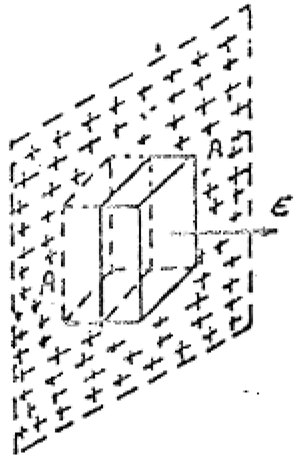
مثال ۲ : سطح باردار خیلی بزرگ . برای آنکه میدان را در نقطه ای بفاصله r از سطح حساب کنیم یک مکعب بارتفاع $2r$ میگیریم وقانون گوس را در مورد آن بکار میبریم . فرض میکنیم دانسیته توزیع بار روی سطح σ باشد . بنابتقارن میدان عمود بر سطح است وبنابراین ازکاربرد قانون

گوس نتیجه میشود

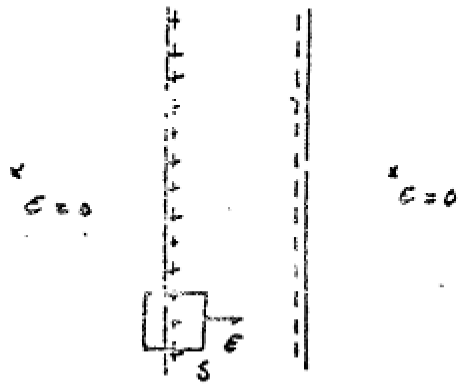
$$\oint \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\mathcal{E}A + \mathcal{E}A' = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



حال اگر دو سطح موازی داشته باشیم که بار روی آنها بترتیب با دانسیته σ+ و σ- توزیع شده باشد در اینصورت بکمک انتگرال گیری میتوان نشان داد که میدانهای حاصل از این دو سطح در نقطه ای واقع در خارج از آنها یکدیگر را خنثی میکنند وبنابراین میدان منتجه در چنین نقاطی صفر است . حال اگر قانون گوس را در مورد مکعب S بکار بریم باین نتیجه میرسیم که میدان درنقاط واقع بین دو سطح برابر $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ میباشد .



مثال ۳ میدان حاصل از یک هادی باردار:

همانطورکه دیدیم هادیها موادی هستند که دارای تعداد زیادی حاملین آزاد بار میباشند . این حاملین بار را اثر کوچکترین میدان الکتریکی حرکت میکنند تاآنکه جائی پیدا کنند که در آن تحت تاثیر نیروها نباشند . حال درداخل یک هادی میدان الکتریکی بایستی صفر باشد چه اگر میدانی وجود میداشت این حاملین باربایستی حرکت کنند . پس درحالت تعادل استاتیک میدان