جلسه اول ۸۹,۷,۴

گرانش : A Relativist's Toolkit (Eric Poisson)

کتاب Weinberg در tensor analysis 12.5: Arfken

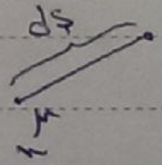
ایده‌ی متغیر بودن فواصل مکانی و زمانی توسط اینشتین مطرح شد: بازه‌های مکانی و زمانی بازه‌های ثابتی نیستند و می‌توانند بسته به دید ناظر انبساط و انقباض پیدا کنند.

space-time، یک manifold خمیده است. فضایی است که بطور local مشابه $\mathbb{R}^4$ است.

سه بعد مکانی داریم و یک بعد زمانی: (x^0, x^1, x^2, x^3) $\quad \mu = \overset{\text{زمان}}{0}, \underbrace{1, 2, 3}_{\text{مکان}}$

هر نقطه از این manifold با x^μ نشان داده می‌شود. (event)

فاصله هر دو نقطه مجاور در این manifold ناوردا است؛ بستگی به دید ناظر ندارد.



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \sim \text{invariant}$$
$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2$$

?

$ds^2 = 0 \rightarrow$ light-like سیگنال نوری (null)
$ds^2 > 0 \rightarrow$ space-like
$ds^2 < 0 \rightarrow$ time-like

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \quad \left(= \sum_{\mu\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu\right)$$

$$g_{00} = -c^2 \quad , \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \quad ; \quad g_{\mu\nu} = 0 \ \text{ if } \mu \neq \nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ تانسور متریک فضای مینکوفسکی

می‌توان گفت metric فاصله دو نقطه از فضا را به ما می‌دهد.

در نسبیت عام، $g_{\mu\nu}$ تابع فضا زمان می‌شود و اجازه می‌دهیم که متریک خمش داشته

روی ۲ بعدی را تصور کنیم. موجوداتی که روی این روی ۲ بعدی زندگی می‌کنند، متوجه بعد سوم و پیچش و خمش روی خود نمی‌شوند. اگر بتوان از بعدی بالاتر

باشد و درایه‌های آن مقادیر ثابتی نباشند. جهان ما در جهان یک manifold ۴ بعدی خمیده است:

گرانش، ناشی از خمش فضا-زمان است یعنی متریک فضا تحت اثر جرم و انرژی موجود در فضا ثابت نیست. ← خمش فضا-زمان (شکل را ببینید)

در نسبیت عام، $c=1$ و $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ که $g_{\mu\nu}$ می‌تواند تابع زمان باشد.

. فضا-زمان یک manifold خمیده چهاربعدی است.

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g_{00} & \cdots & g_{03} \\ \vdots & & \\ g_{30} & \cdots & g_{33}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inverse}} g^{\mu\nu}=g^{-1}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} g^{00} & \cdots & g^{03} \\ \vdots & & \\ g^{30} & \cdots & g^{33}\end{pmatrix}$$

در جهان g مقادیر غیرصفر دارد.

Scalar Function: تابعی که روی نقاط manifold تعریف می‌شود.

میدان نرده‌ای: f یک تابع حقیقی است. $f(x^\mu)\in\mathbb{R}$

مبنای تعریف میدان نرده‌ای (مثل دما در یک فضا):

$f(x^\mu)=f'(x'^\mu)$

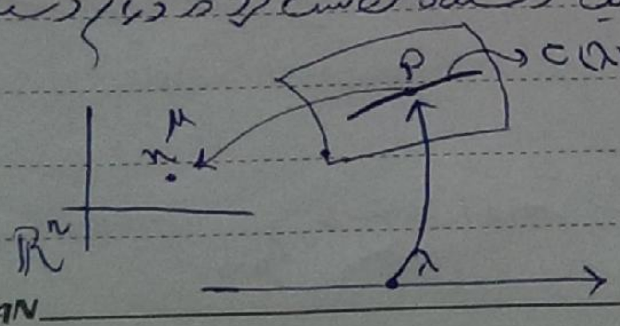
یعنی با میدانی سروکار داریم که وابسته به دستگاه مختصات نیست.

curve: مسیر را در یک manifold تعریف می‌کنیم. مسیر یک manifold،

نگاشتی است که به ازای هر λ یک $x^\mu(\lambda)$ را می‌دهد.

" نگاشتی است از اعداد حقیقی به نقاط manifold.

هر نقطه از manifold را می‌توان به یک دستگاه نگاشت کرد که در آن دستگاه مختصات دارای x^μ مختصه باشد.



Subject: ۳
Year. Month. Date. ( )

تناظر نگاشت؟ می‌تواند یک به یک باشد و یا اینکه اگر loop داشتیم: ایراد! نباشد

روی مسیر (curve) حرکت می‌کنیم:

$$dF = F(x^\mu + dx^\mu) - F(x^\mu) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

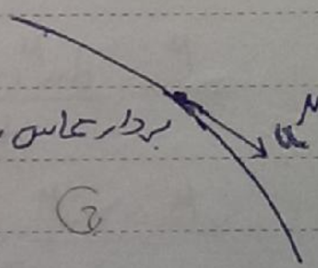
(گرادیان F) $\longleftarrow$ dual vector

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = F_{,\mu} \longrightarrow dF = F_{,\mu}\, dx^\mu = F_{,\mu} \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} d\lambda$$

که مشتق جزئی نسبت به ۳

dx^μ ای را انتخاب می‌کنیم که در راستای curve حرکت کند. (در جهات مختلف dx^μ داریم.)

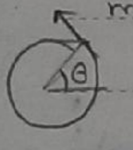
$$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} = u^\mu(\lambda) \rightsquigarrow \text{tangent vector}$$



به عنوان مثال: $\frac{dx^i}{dt} = v^i$

$(\lambda = t = \text{time})$

مثال ← حرکت روی دایره: جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت روی دایره حرکت می‌کند. manifold



$x = \theta$
$\lambda = t$
$\to dx/dt = \hat{u}$

دایره است چون ۱ بعدی است ← curve همان دایره می‌شود. tangent:
در یک فضای مماس قرار دارد که با manifold بعدیت برابر دارد.

چون $F(x^\mu)$ یک کمیت حقیقی (عدد) است و λ هم کمیت حقیقی است، دیفرانسیل اینها هم حقیقی است.

$$\frac{dF(x^\mu)}{d\lambda} = \underbrace{F_{,\mu}}_{\text{covector}} \underbrace{u^\mu}_{\text{بردار مماس}} \in \mathbb{R}$$

$u^\mu \to$ tangent space
$F_{,\mu} \to$ co-tangent space
} + ~ فضای حقیقی

u^μ ← برداری است که در همه جا مماس بر مسیر است.

$F_{,\mu}$ ← dual vector است که گرادیان تابع F می‌باشد.

$$= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\gamma} A^\gamma A_\nu = \delta^\nu_\gamma A^\gamma A_\nu = A^\nu A_\nu \checkmark$$

ویژگی‌های تبدیل‌های عام مختصات:

$A^\mu \rightarrow$ contravariant index (پادوردا)

$B_\mu \rightarrow$ covariant index (همووردا)

رفتار بردارها تحت تبدیلات عام مختصات:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu$$

Scalar: $F(x^\mu) = F'(x'^\mu)$

در هر تبدیل مختصات، مولفه‌ها دستگاه جدید تابع مولفه‌های دستگاه قدیم هستند:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(x'^\alpha)}{d\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{dx'^\alpha}{d\lambda}$$

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} u'^\alpha \quad , \quad u'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} u^\mu \sim \text{vector}$$

$$F_{,\mu} = \frac{\partial F}{\partial x^\mu(x'^\alpha)} = \frac{\partial F}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = F'_{,\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}$$

$$A_\mu = A'_\alpha \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \quad , \quad A'_\alpha = A_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \rightsquigarrow \text{dual vector}$$

تبدیلات عام:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu$$

$F(x^\mu) = F'(x'^\mu)$ (scalar)

✓ $A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha$ (بردار پادوردا (تماس)) $\rightarrow$ vector

✓ $A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha$ (co-vector) بردار همووردا $\rightarrow$ dual vector

$A^\alpha A_\alpha$ تحت تبدیلات ناورداست.

↳ اسکالر (در بالای صفحه)

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\nu}$$ (تانسور مرتبه ۲ (بالا دوتا)

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T^{\mu}{}_{\nu}$$ تانسور مرتبه ۲ مخلوط
(2^{nd} rank mixed tensor)

بالا و پایین بردن اندیس ها در تانسورها: (به کمک تانسور متریک)

Lowering & rising operation:

$$A_{\mu} = g_{\alpha\mu} A^{\alpha}$$

(?)

$$A^{\mu} = g^{\mu\alpha} A_{\alpha}$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} T^{\alpha\beta}$$ ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ متقارن است metric)

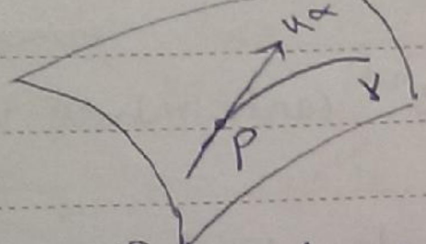
$$g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = |A|^2 = A_{\nu} A^{\nu} = |A|^2 \in \mathbb{R}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

imp! vectors are tensors of type (1,0) : (A^{α})
dual vectors are tensors of type (0,1) : (A_{α})

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$ (metric is a quantity that represents the gravitational field in general relativity.)

page ۳ ← نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که تانسورها دقیقاً روی manifold تعریف می‌شوند.



همان‌طور که از شکل مشخص است بردار مماس u^α روی manifold نیست بلکه در صفحه‌ی مماس بر manifold در نقطه‌ی P قرار دارد. بنابراین تانسورها در نقطه‌ی P را می‌توان روی صفحه‌ی مماس در نظر گرفت.
تانسورها در نقطه‌ی P می‌توانند جمع و یا contract شوند، اما تانسوری در نقطه‌ی P و تانسوری دیگر در نقطه‌ی Q را نمی‌توان از طریق تانسوری ترکیب کرد، در این حالت که به صفحات مماس مختلف تعلق دارند.
به عنوان مثال، عمل‌های $A^\alpha(P) B^\beta(Q)$ و $A^\alpha(Q) - A^\alpha(P)$ را نمی‌توان به عنوان عمل‌های تانسوری بیان کرد.

← دیفرانسیل‌گیری یک عمل مستقیم و سر راست روی تانسورها نیست.
و برای این کار باید قانونی برای حمل تانسور از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر، خواهیم کرد.

از دیدگاه نسبیت خاص، [illegible] فضا-زمان بی‌نهایت است و Flat.

از دید نسبیت عام فضا-زمان خمش دارد و ابزار مناسب برای بررسی آن هندسه ریمانی است که از حساب تانسوری استفاده می‌کنیم. (فضا-زمان یک manifold چهاربعدی است.)

covariant form

بردارها: (تانسور مرتبه ۱)

$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ اندیس‌ها بالا

$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ اندیس‌ها پایین → برای رفتن از یک دستگاه به دستگاه دیگر.

object‌های نسبیت عام کمیت‌های تانسوری‌اند.

میدان‌های الکترومغناطیسی کمیت‌های تانسور مرتبه ۲ هستند: $F^{\mu\nu}$

مومنتم و انرژی: $T^{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad g_{\mu\nu}: \text{metric}$$

قوانین فیزیکی باید از دید ناظرهای مختلف قانون یکسانی (فرم یکسانی داشته باشند) داشته باشند ← قوانین فیزیکی را تانسوری نشان می‌دهیم. universal

با روابط covariant می‌توان در دستگاه‌های مختلف رفت.

کمیت‌های فیزیکی از طریق روابط تانسوری در دستگاه‌های مختلف به هم مرتبط می‌شوند.

(Principle of general covariant   اصل هموردایی عام)

$A^\mu{}_{,\nu}$

در فضای خمیده، مشتق جزئی هم تانسوری دارد:

x: $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = B^\mu{}_\nu$ تانسور نیست

که شکل تانسورها تحت تبدیل مختصات تبدیل می‌شود.

در مرجع سوم پایین می‌آید.

$$x': \quad \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha\right)$$

مشتق یک ۴-بردار تبدیل می‌شود.

$$= \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\nu \partial x^\alpha} A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x'^\nu}$$

در جای جمله بالا

بهتر است بنویسیم

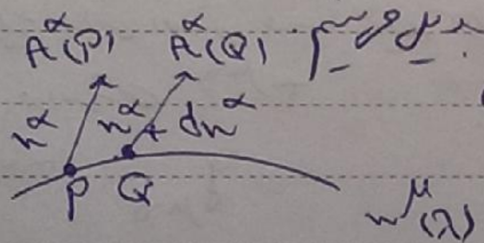
$$= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}}_{A^\alpha_{,\beta}} + \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha}_{\text{این جمله نباید ظاهر شود.}}$$

که دوست داریم.

← مشتق جزئی را با مشتق هموردا استبدال می‌کنیم

مسیری در نظر می‌گیریم (در فضا-زمان)



مشکل از اینجا ایجاد می‌شود که A^α بردار را در دو نقطه مختلف با هم مقایسه می‌کنیم. و در فضای خمیده مولفه‌های بردار عوض می‌شود.

پس باید بردار A^α را ابتدا انتقال دهیم و سپس مشتق جزئی بگیریم.
↳ Parallel transport

$$dA^\alpha = A^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - A^\alpha(x) = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta = A^\alpha_{,\beta}\, dx^\beta \rightarrow$$ تانسوری نیست

مشتق جزئی

در مسیر خمش فضا : $\delta A^\alpha \equiv A^\alpha_T(P) - A^\alpha(Q)$

$$= \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu dx^\beta$$

connection

A^α transport شده از نقطه Q به P (در نقطه P)

باید این تغییرات متناسب با dx و اندازه بردار باشد. (ضریب کریستوفل) انتقال

Γ

(هیچ مشتقی روی مسیر نداریم.)

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = u^\mu \rightarrow$$ مماس بر مسیر

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \delta A^\alpha = A^\alpha{}_{,\beta}\, dx^\beta + \Gamma_{\mu\beta}{}^{\alpha} A^\mu dx^\beta$$

$$\downarrow$$

$$A^\alpha_T(P) - A^\alpha(P) \qquad = (A^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma_{\mu\beta}{}^{\alpha} A^\mu)\, dx^\beta$$

تانسور مرتبه ۲

$$\frac{DA^\alpha}{d\lambda} = (A^\alpha{}_{;\beta})\frac{dx^\beta}{d\lambda}$$ مشتق هموردا

مشتق هموردای A^α نسبت به x^β (covariant derivative of the vector A)

$$\Rightarrow \frac{DA^\mu}{d\lambda} = A^\mu{}_{;\nu}\, u^\nu$$

$$A^\mu{}_{;\nu} = A^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}{}^{\mu} A^\alpha \quad ;$$

اصل: ① connection نسبت به اندیس های (پایین) (هم‌جای) متقارن است.

$$\Gamma_{\nu\alpha}{}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\nu}{}^{\mu}$$

② $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ مشتق هموردای تانسور متریک صفر است. (covariant const متریک)

اگر این دو اصل را قبول نکنیم وارد فضای ریمانی پیچیده تری می شویم که پیچش دارد.

✓ For scalars: $D \equiv d$

مشتق هموردایی که بدست آوردیم (برای بردارها) قابل تعمیم در تانسورهای مراتب بالاتر است.

برای A_ν و B_μ مشتق هموردا را بدست آوردیم ← $T_{\mu\nu} = B_\mu A_\nu$ (ضرب تانسوری) خواهیم داشت:

$$T_{\alpha\beta;\gamma} = T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\lambda} T_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\lambda} T_{\alpha\lambda}$$

برای اندیس های بالا علامت ها مثبت اند.

جمع بسته می‌شود. (جای $\beta\alpha$ را می‌توان عوض کرد چون Γ نسبت به جابجایی این دو متقارن است.)

حال نشان می‌دهیم که Γ^{α} در صورت این کریستوفل نوع دوم درست می‌باشد:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} g_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} g_{\lambda\alpha} = 0$$

$\times g^{\beta\varepsilon}$
$$g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\beta,\gamma} - \underbrace{g^{\beta\varepsilon} g_{\lambda\beta}}_{\delta^{\varepsilon}_{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} g_{\lambda\alpha} g^{\beta\varepsilon} = 0$$

$$\Rightarrow \quad g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} g_{\lambda\alpha} g^{\beta\varepsilon} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha \leftrightarrow \gamma: \quad g^{\beta\varepsilon} g_{\gamma\beta,\alpha} - \Gamma^{\varepsilon}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} g_{\lambda\gamma} g^{\beta\varepsilon} = 0 \quad (2)$$

رابطه اول صفحه $\times g^{\gamma\varepsilon}$
$$g^{\gamma\varepsilon} g_{\alpha\beta,\gamma} - g^{\gamma\varepsilon} g_{\lambda\beta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} - g^{\gamma\varepsilon} g_{\lambda\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} = 0$$

$$\gamma \leftrightarrow \beta: \quad g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\gamma,\beta} - g^{\beta\varepsilon} g_{\lambda\gamma} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - g^{\beta\varepsilon} g_{\lambda\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\beta} = 0 \quad (3)$$

$(1) + (2) - (3)$

$$\Rightarrow \quad g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\beta,\gamma} + g^{\beta\varepsilon} g_{\gamma\beta,\alpha} - g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\gamma,\beta} - 2\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\gamma}$$
$$\cancel{- \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} g_{\lambda\alpha} g^{\beta\varepsilon}} \cancel{- \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} g_{\lambda\gamma} g^{\beta\varepsilon}} \cancel{+ g^{\beta\varepsilon} g_{\lambda\gamma} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}$$
$$\cancel{+ g^{\beta\varepsilon} g_{\lambda\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\beta}} = 0$$

بررسی Γ جای α و γ عوض شده

$$\Rightarrow \quad \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} g^{\varepsilon\beta} \left(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta} \right) \quad ✓$$

- میدان تانسوری $T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}$، parallel transported خوانده می‌شود (روی منحنی γ) در صورتی که مشتق هموردای آن روی این مسیر صفر شود:

$$D T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} / d\lambda = T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots;\mu} u^{\mu} = 0$$

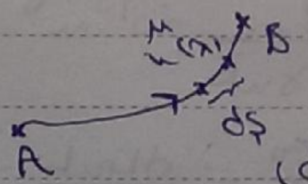
geodesics :

اینشتین پس از این که بیان کرد فضا زمان یک manifold خمیده است، مسیر حرکت ذره را تعیین کرد. اگر تنها گرانش را در نظر بگیریم، ذرات (و آزاد) در کوتاه‌ترین مسیر که مسیر خمیده است حرکت می‌کنند. (مسیر geodesic) که در فضا-زمان (یعنی مسیر حرکت ذره را به مسیری خاص در آن ربط بدهد.)

(زمین در کوتاه‌ترین مسیر ممکن به دور خورشید حرکت می‌کند. ← مسیر بیضوی که خورشید در کانونش قرار دارد.)

طبیعی‌ترین مسیر در یک فضا-زمان خمیده، مسیری خمیده است.

مسیر بیضوی projection مسیر geodesic در فضا است.
(مسیر geod. در فضا-زمان تعریف می‌شود.)



$$S_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{ds^2}$$

$(ds^2>0)$
(space like)

λ : پارامتر حقیقی

For $ds^2<0 \Rightarrow \sqrt{-ds^2}$ (time like)

(Invariant under a reparametrization of the curve, $\lambda \to \lambda'(\lambda)$)

$$= \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

$$S_{AB} = \int_A^B L\, d\lambda \quad ; \quad L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = L(x^\alpha_{(\lambda)}, \dot{x}^\beta)$$

فصل ۱۷ کتاب Arfken

معادله لاگرانژ : $\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2L}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

$$, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{2L} g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = \frac{g_{\mu\nu}}{2L}(\delta^\mu_\alpha \dot{x}^\nu + \delta^\nu_\alpha \dot{x}^\mu)$$

در معادله لاگرانژ قرار میدهیم:

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{2L}(g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu + g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu)\right) \sim \frac{1}{L} g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu$$

$$= -\frac{1}{L^2}\frac{dL}{d\lambda} g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu + \frac{1}{\cancel{L}}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta \dot{x}^\nu + \frac{1}{\cancel{L}} g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\nu$$

$\times g^{\alpha k} \Rightarrow$

$g_{\alpha\nu}$ را حذف

$$\overbrace{g^{\alpha k} g_{\alpha\nu}}^{\delta^k_\nu}\ddot{x}^\nu + g^{\alpha k}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta \dot{x}^\nu - \frac{1}{2} g^{\alpha k}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{d\ln L}{d\lambda}\overbrace{g^{\alpha k} g_{\alpha\nu}}^{\delta^k_\nu}\dot{x}^\nu$$

$$\Rightarrow \ddot{x}^k + \frac{1}{2} g^{\alpha k}\left[2\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta \dot{x}^\nu - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right] = k\dot{x}^k$$

میخواهیم به صورت نماد کریستوفل بنویسیم:

$$2\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta \dot{x}^\nu = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu \dot{x}^\mu$$

این تبدیلها صورت گرفته $\Rightarrow \quad \beta \to \mu \qquad \beta \to \nu, \quad \nu \to \mu$

$$\Rightarrow \ddot{x}^k + \frac{1}{2} g^{\alpha k}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

$$= k\dot{x}^k \quad ; \quad k = \frac{d\ln L}{d\lambda} \quad (L=1)$$

مخالف صفر می‌باشد.

$$\Rightarrow \frac{d^2x^k}{d\lambda^2}+\Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \quad ✓$$

معادله ژئودزیک

↓ مسیر حرکت ذره

در این حالت L مستقیماً وابسته به λ نیست.

با داشتن metric و یافتن Γ، می‌توان از معادله دیفرانسیل‌ها $x^k(\lambda)$ را یافت.

متریک در اطراف خورشید: Schwarz-Shield

اگر نور را به صورت یک ذره در نظر بگیریم، فوتون‌ها هم از این معادله پیروی می‌کنند. ← نور در عبور از نزدیکی خورشید خمیده می‌شود.

↓ برای فوتون‌ها ← $ds=0$

در اطراف هر جرم مثل خورشید، بی‌نهایت مسیر geodesic داریم و این که ذره کدام مسیر را انتخاب کند بستگی به initial condition مثل سرعت اولیه دارد.

معادله geodesic را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

$u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta = k u^\alpha$ ($u^\alpha=\dot{x}^\alpha$ مماس بر geo.)

برای geodesic های زمان‌گونه، پارامتر را τ (proper time) و برای geodesic های فضاگونه، پارامتر را s (proper distance) انتخاب می‌کنیم. چرا؟

$d\tau^2=-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (timelike geodesics)

$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (spacelike geodesics)

$\Rightarrow L=1$, $k=0$, $dL/d\lambda=0 \Rightarrow u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta=0$

← بردار مماس روی geodesic، parallel transported می‌باشد.

هر دو پارامترهای مربوط به τ و s ← affine parameters

X طبق کتاب را دوباره بخوانم:

$$L=\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}=\sqrt{\frac{ds^2}{d\lambda^2}}=\frac{ds}{d\lambda} \begin{cases}\lambda=s \to L=1\\ \lambda=\tau \to L=1\end{cases}$$

Year. Month. Date. ( )

page 5: we had: $A^{\alpha}{}_{;\beta} = A^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu}$

$\Rightarrow$ we have: $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} = A^{\alpha}{}_{;\beta} - A^{\alpha}{}_{,\beta}$

$\xrightarrow{\text{transformation}}$ $\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} A^{\mu'} = A^{\alpha'}{}_{;\beta'} - A^{\alpha'}{}_{,\beta'}$ [illegible]

$$A^{\alpha'}{}_{,\beta'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} A^{\alpha'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} A^{\alpha}$$

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \cancel{\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} \underbrace{A^{\mu'}}_{\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \frac{d x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} A^{\mu}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \frac{d x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}$$

$\times \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\gamma'}}$

$$\Rightarrow \Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \underbrace{\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}}}_{\text{covariant}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$$

page 5: یافتن عملکرد مشتق هموردا روی : dual vector

$$d(A^{\alpha} P_{\alpha}) = D(A^{\alpha} P_{\alpha}) = (DA^{\alpha}) P_{\alpha} + A^{\alpha} D(P_{\alpha})$$

[illegible] $\Rightarrow \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} P_{\alpha} + A^{\alpha} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta}$

$$= (A^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu}) dx^{\beta} P_{\alpha} + A^{\alpha} D(P_{\alpha})$$

$$\Rightarrow A^{\alpha}{}_{,\beta} P_{\alpha} dx^{\beta} + A^{\alpha} P_{\alpha,\beta} dx^{\beta} =$$

تبدیل ضریب کریستوفل؟

$$A^{\alpha}{}_{;\beta} = A^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu}$$

$$\rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} = A^{\alpha}{}_{;\beta} - A^{\alpha}{}_{,\beta} \quad (۳)$$

$$A^{\alpha'}{}_{,\beta'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} A^{\alpha'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}\right)$$

$$= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}\right) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \underbrace{\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}}_{A^{\alpha}{}_{,\beta}} \quad (1)$$

$$A^{\alpha'}{}_{;\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} A^{\alpha}{}_{;\beta}$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \left(A^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu}\right)$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} A^{\alpha}{}_{,\beta} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} \quad (۲)$$

1 و ۲ را در رابطه ۳ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow \Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \cancel{A^{\mu}}$$

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \cancel{A^{\mu}} \qquad - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}} \cancel{A^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \Rightarrow \Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$$

$$- \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}} \quad ✓$$

$$(A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu})\, dx^{\beta} P_{\alpha} + A^{\alpha} D(P_{\alpha})$$

$$\Rightarrow A^{\alpha}_{,\beta} P_{\alpha} \cancel{dx^{\beta}} - \cancel{A^{\alpha}_{,\beta}}\, dx^{\beta} P_{\alpha} + A^{\alpha} P_{\alpha,\beta}\, dx^{\beta}$$

$$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} dx^{\beta} P_{\alpha} = A^{\alpha} D(P_{\alpha})$$

← جای α و μ عوض شده

↓

چون جمع روی اندیس‌هاست تفاوتی ندارد.

$$\Rightarrow \cancel{A^{\alpha}} P_{\alpha,\beta}\, dx^{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \cancel{A^{\alpha}}\, dx^{\beta} P_{\mu} = \cancel{A^{\alpha}} D(P_{\alpha})$$

$$\Rightarrow D(P_{\alpha}) = P_{\alpha,\beta}\, dx^{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, dx^{\beta} P_{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{D(P_{\alpha})}{d\lambda} = \underbrace{(P_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} P_{\mu})}_{P_{\alpha;\beta}} u^{\beta} \checkmark$$

if we have: $T_{\alpha\beta} = B_{\alpha} A_{\beta}$

$$\Rightarrow T_{\alpha\beta;\gamma} = (B_{\alpha;\gamma} A_{\beta} + B_{\alpha} A_{\beta;\gamma})$$

$$= (B_{\alpha,\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} B_{\lambda}) A_{\beta} + B_{\alpha} (A_{\beta,\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} A_{\lambda})$$

$$= B_{\alpha,\gamma} A_{\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} B_{\lambda} A_{\beta} + B_{\alpha} A_{\beta,\gamma} - B_{\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} A_{\lambda}$$

$$\Rightarrow T_{\alpha\beta;\gamma} = T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} T_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} T_{\alpha\lambda} \checkmark$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$T^{\alpha}{}_{\beta;\gamma} = ?$ $\qquad T^{\alpha}{}_{\beta} = B^{\alpha} A_{\beta}$

$$\Rightarrow T^{\alpha}{}_{\beta;\gamma} = (B^{\alpha}{}_{;\gamma} A_{\beta} + B^{\alpha} A_{\beta;\gamma})$$

$$= (B^{\alpha}{}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} B^{\mu}) A_{\beta} + B^{\alpha} (A_{\beta,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} A_{\mu})$$

$$= \underline{B^{\alpha}{}_{,\gamma} A_{\beta}} + \underline{B^{\alpha} A_{\beta,\gamma}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} B^{\mu} A_{\beta} - B^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} A_{\mu}$$

$$\Rightarrow T^{\alpha}{}_{\beta;\gamma} = T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} T^{\mu}{}_{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} T^{\alpha}{}_{\mu}$$ ✓

← به ازای هر index یک ترم connection وجود دارد.
اگر اندیس بالا باشد (α) ← علامت Γ مثبت
اگر اندیس پایین باشد (β) ← علامت Γ منفی

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

دقیقاً مثل قبلی : ([illegible])

$$\Gamma^{1}_{00} = \tfrac{1}{2} g^{1\beta} (g_{0\beta,0} + g_{0\beta,0} - g_{00,\beta})$$

همه $g^{1\beta}$ ها صفرند

$$= \tfrac{1}{2} g^{11} (g_{01,0} + g_{01,0} - g_{00,1}) = 0$$

فقط به ازای $\beta = 1$

در نتیجه تمام Γ ها صفر می‌شوند!

جلسه سوم ۸۹,۷,۱۱

geodesic های spacelike از طریق سیگنال های فیزیکی به هم مرتبط نمی‌شوند.
ذرات فیزیکی روی این geodesic ها نداریم.

انتخاب λ اختیاری است. برای ذراتی که با سرعت کمتر از سرعت نور حرکت می‌کنند: $\lambda = s$
↳ مثل invariant $\neq 0$

← برای lightlike ها (نور و ذرات با جرم سکون صفر) نمی‌توان λ را s در نظر گرفت.
(زیرا $s=0$)
- λ می‌تواند پارامتری مثل t (زمان) باشد.

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}=0 \leftarrow \underline{\Gamma}=0 \text{ در فضای مینکوفسکی (Flat)}$$

$$\Rightarrow x^\mu = a^\mu\lambda + b^\mu \checkmark$$

با حذف s، خط در فضای مینکوفسکی حاصل می‌شود.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx^1}{dx^0}$$

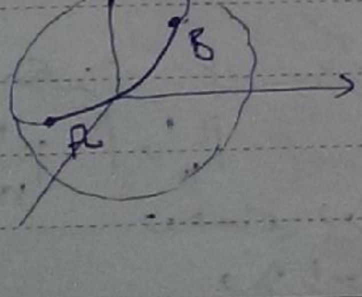
$$dx^\mu = a^\mu ds + b^\mu \qquad dx^1 = a^1\, ds$$

$$dx^0 = a^0\, ds \Rightarrow v_x = \frac{a^1}{a^0} = \text{const.} = v_{0x}$$

$$v_y = a^2/a^0 \quad , \quad v_z = \frac{a^3}{a^0}$$

geodesic روی کره:

معادله geodesic منحصر به فضا-زمان نیست. آن را می‌توان برای هر manifold با ابعاد دلخواه به کار برد.



بخشی از دایره عظیمه = کوتاه‌ترین مسیر

Spherical metric :

ابتدا metric را درست می‌کنیم:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

روی رویه‌ی کره: قید: $r = R = const$

metric سطح کره $\Rightarrow ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \Rightarrow$

که (S^2) ← به این نام خوانده می‌شود.

(کره n بعدی ← در فضای n+1 بعدی اقلیدسی می‌بریم و بعد $r = const$ قرار می‌دهیم.)

$x^1 = \theta \quad , x^2 = \varphi$ ✓

$$g_{\theta\theta} = g_{11} = R^2 \quad , \quad g_{22} = R^2\sin^2\theta \quad , \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

از روی metric نماد کریستوفل را محاسبه می‌کنیم:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\alpha}\right)$$

باید $\alpha = 1$ $\Rightarrow$ $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}\left(2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)$

↓

$g^{1\alpha} = 0$ در غیر این صورت می‌شود.

$$= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(R^2) = 0$$

باقی Γها را همین ترتیب محاسبه می‌کنیم: (Γ^1_{12} , Γ^1_{21} , Γ^2_{11} , Γ^2_{12} ,
Γ^2_{21} , Γ^2_{22}) , Γ^1_{22}

دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ برای θ و φ درست می‌کنیم
و λ را حذف می‌کنیم ← معادله دایره عظیمه حاصل
می‌شود.

Subject: پیوست ص ۱۴۰
Year. Month. Date. ( )

$$-\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{1\alpha}\left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$\underline{\alpha=1|}$ $$= \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}} - \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}}\right) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(R^2) = 0$$

$$-\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{1\alpha}\left(\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$\underline{\alpha=1|}$ $$= \frac{1}{2} g^{11}\left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(R^2) = 0$$

$$-\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{2\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$\underline{\alpha=2|}$ $$= \frac{1}{2} g^{22}\left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}} + \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\phi\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(R^2) = 0$$

$$-\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{2\alpha}\left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$\underline{\alpha=2|}$ $$= \frac{1}{2} g^{22}\left(\cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial}{\partial \theta}(R^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{\cancel{2R^2\sin^2\theta}} \cancel{R^2\, 2\sin\theta} \cos\theta$$

$$= \cot\theta \checkmark$$

$$-\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{2\alpha}\left(\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\alpha}\right)$$

$\underline{\alpha=2|}$ $$= \frac{1}{2} g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}} - \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}\right) = \cot\theta \checkmark$$