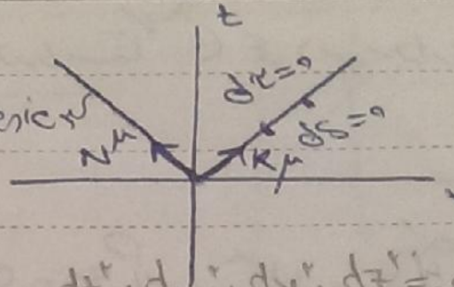
Subject: 1 · (Poisson) ، گرانش ۲ ۹۵، ۱۱، ۱۶ جلسه اول
Year. Month. Date. ( )

null shells:



$c=1$

$x \pm t = 0$

$dx = \pm dt$

$ds = c\, d\tau = 0 \qquad (ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -d\tau^2)\ d\tau = ds = 0$

← metric اصطلاحاً singular می‌شود.

null geo. ها ابررویه null را generate می‌کنند.

$K^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda} \qquad K^\beta K^\alpha{}_{;\beta} = 0 \Leftarrow$ geodesic ← K^μ بردار مماس بر

$K^\mu K_\mu = 0 \qquad K^\mu$ هم بر عمود بر ابررویه و هم در امتداد ابررویه است.

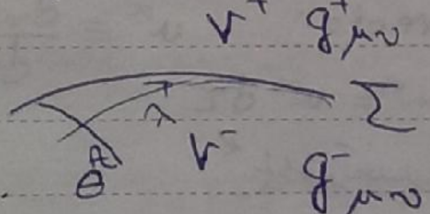
$N^\mu N_\mu = 0$

& $N^\mu K_\mu = -1 \sim$ ظاهراً بر هم عمودند ولی اینطور نیست.

inner product در اینجا با ضرب داخلی در فضای اقلیدسی متفاوت است.

(فوتون‌ها روی زیرفضای null حرکت می‌کنند. (روی ابررویه null))

چون ابررویه‌ها null از توسط null geodesic ها generate می‌شوند
← پارامتر روی ابررویه را می‌توان پارامتر λ که مربوط به geodesic (در نظر گرفت.



$y^a = (\lambda, \theta^A)$

$, x^\mu$

$\lambda \neq \tau \neq s$ (ابررویه null)

$$e^\alpha{}_a \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad k^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda}, \quad e^\alpha{}_A \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A}$$

ds در امتداد null geodesic (پارامتر λ) صفر می‌شود ← مختصه مربوط
به λ را از θ^A ها جدا می‌کنیم. (θ^A ها مشکلی ندارند ← در امتداد θ^A ها
$ds \neq 0$.)

ASEMAN

جهت θ^A ها عمود بر جهت λ ← بردار مماس در راستای θ^A عمود بر بردار مماس در راستای λ

← $k_\alpha e^\alpha_A = 0$

بخشی از metric که بخش singular آن (k^α) را جدا کرده‌ایم:

$$\sigma_{AB} = g_{\alpha\beta} e^\alpha_A e^\beta_B$$

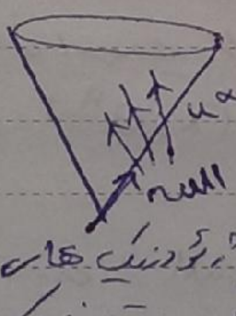
$$\Rightarrow ds^2_\Sigma = \sigma_{AB}\, d\theta^A d\theta^B$$

داریم: $N_\alpha e^\alpha_A = 0$.

در امتداد null geodesic ← شبیه k_α است. (اما در جهت متفاوت. ← در شکل صفحه قبل نگاه کنید.)

we had: $g^{\alpha\beta} = -k^\alpha N^\beta - k^\beta N^\alpha + \sigma^{AB} e^\alpha_A e^\beta_B$

ذرات مادی می‌توانند null ها را cross کنند:



u^α : velocity 4-vector $\quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

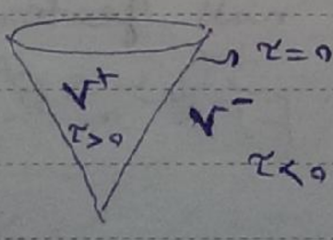
$dx^\alpha = u^\alpha d\tau$

پارامتر تغییر یافته در امتداد مسیر ژئودزیک های مادی

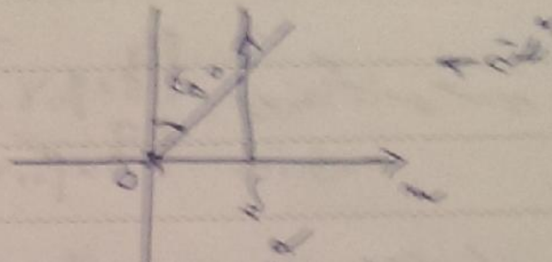
حال τ (x^α) را برای geodesic های ذرات مادی تعریف می‌کنیم.

$\tau \neq 0$

مبدأ τ را روی null hyper. قرار می‌دهیم. حرکت از گذشته به آینده



(یعنی ابر رویه null جزء دو فضا‌زمان شده است.)



جبهه موج نوری از مقابل ذره عبور می‌کند. (یعنی hyper را cross می‌کنند.)

و مشتق ($\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} = 0$)

که خارج از صفحه نوری نقطه O

هر نقطه که خارج از صفحه نوری واقع گرفته شود ولی با رفتن از داخل به خارج باید مشتق سرعت نور شود.

---

k_α عمود بر سطح null ←

$$k_\alpha = A\,\partial_\alpha \tau$$

$$k_\alpha u^\alpha = A u^\alpha \partial_\alpha \tau = A \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} = A$$

$$\Rightarrow k_\alpha = k_\mu u^\mu \partial_\alpha \tau$$

$$\Rightarrow k_\alpha = -(-k_\mu u^\mu)\frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha}$$

حتی میشه $k_\alpha = 0$ ← که بعداً میتونیم normalization انجام دهیم

← این normalization یک مقدار ساده‌ای است. (در اینجا فرض کردیم coordinate اضافی τ.)

$$[k^\alpha] = [e^\alpha{}_A] = [N^\alpha] = [u^\alpha] = 0$$

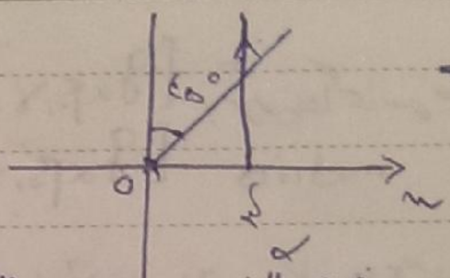
شرط پیوستگی را داشته باشیم. (در حالت)

که سه قسمت میشود: یک قسمت مربوط به V^+، یک قسمت مربوط به V^-

و یک قسمت مربوط به thin shell (singular)

$$R^\alpha_{\Sigma\,\beta\gamma\delta} = -(-k_\mu u^\mu)^{-1}\left([\Gamma^\alpha_{\beta\delta}]k_\gamma - [\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}]k_\delta\right)\delta(\tau)$$

که فقط به این معنی است که دو قسمت دیگر را کنار گذاشته‌ام.



نقطه ۲

جبهه موج نوری از مقابل ذره عبور می‌کند.
(یعنی hyper را cross می‌کند.)

ذره ساکن ($\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$)
↲ در خارج از مخروط نوری نقطه O

ذره می‌تواند از خارج از مخروط نوری وارد آن شود ولی برای رفتن از داخل به خارج باید سرعتش بیشتر از سرعت نور شود.

$k_\alpha = A\,\partial_\alpha \tau$ ← null عمود بر ابررویه k_α

$$k_\alpha u^\alpha = A\, u^\alpha \partial_\alpha \tau = A \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} = A$$

$$\Rightarrow k_\alpha = k_\mu u^\mu \partial_\alpha \tau$$

$$\Rightarrow k_\alpha = -(-k_\mu u^\mu)\frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha}$$ ✓

✓ چون norm $k_\alpha = 0$ ← نمی‌توانیم مثل قبل normalization انجام دهیم
← این normalization یک در همه جا سازگار است. (به دلیل ظاهر شدن coordinate اضافی τ)

$[k^\alpha] = [e^\alpha{}_A] = [N^\alpha] = [u^\alpha] = 0$ ✓

مثل قبل تانسور ریمان را بدست می‌آوریم. (در کتاب)
↲ سه قسمت می‌شود: یک قسمت مربوط به V^+، یک قسمت مربوط به V^-
و یک قسمت مربوط به thin shell (singular)

$$\underset{\Sigma}{R^\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = -(-k_\mu u^\mu)^{-1}\left([\Gamma^\alpha_{\beta\delta}]k_\gamma - [\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}]k_\delta\right)\delta(\tau)$$

↲ مربوط به ابررویه (دو قسمت دیگر را کنار گذاشته‌ایم.)

فرض کنید $[g_{\alpha\beta}] = 0$ ←

مولفه‌های مماسی مشتق metric: $[g_{\alpha\beta,\gamma}]k^{\gamma} = 0$

$[g_{\alpha\beta,\gamma}]e^{\gamma}_{c} = 0$

در حالت کلی حاصل صفر نیست:

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = -\gamma_{\alpha\beta}k_{\gamma} \quad ①$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ نسبت به جابجایی α و β متقارن است.

طرفین ① در N^{γ} ضرب می‌کنیم:

$$\gamma_{\alpha\beta} = [g_{\alpha\beta,\gamma}]N^{\gamma}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\lambda})$$

$$\Rightarrow [\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}] = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}([g_{\lambda\beta,\gamma}] + [g_{\lambda\gamma,\beta}] - [g_{\gamma\beta,\lambda}])$$

برای اینکه بخواهیم singular shell داشته باشیم باید $\gamma_{\alpha\beta} \neq 0$ باشد

← در غیر این صورت $[\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}]$ صفر می‌شود.

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(-\gamma_{\lambda\beta}k_{\gamma} - \gamma_{\lambda\gamma}k_{\beta} + \gamma_{\gamma\beta}k_{\lambda})$$

$$= -\frac{1}{2}(\gamma^{\alpha}_{\beta}k_{\gamma} + \gamma^{\alpha}_{\gamma}k_{\beta} - \gamma_{\beta\gamma}k^{\alpha})$$

این رابطه را در عبارت تانسور ریمان قرار دهیم:

$\Rightarrow$

$$[R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}] = \frac{1}{2}(-k_{\mu}n^{\mu})^{-1}\{\gamma^{\alpha}_{\delta}k_{\beta}k_{\gamma} - \gamma_{\beta\delta}k^{\alpha}k_{\gamma} - \gamma^{\alpha}_{\gamma}k_{\beta}k_{\delta} + \gamma_{\beta\gamma}k^{\alpha}k_{\delta}\}$$

Ricci tensor:

$$\underset{\Sigma}{R}_{\beta\delta} = \underset{\Sigma}{R}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta}$$

$$= \frac{1}{2}(-k_\mu u^\mu)^{-1}\left\{\gamma^{\alpha}_{\delta}k_\beta k_\alpha - \underbrace{\cancel{k_\alpha k^\alpha}}_{0\ (\text{null})}\gamma_{\beta\delta} - \gamma^{\alpha}_{\alpha}k_\beta k_\delta + \gamma_{\beta\alpha}k^\alpha k_\delta\right\}$$

Ricci scalar:

$$\underset{\Sigma}{R} = g^{\beta\delta}\underset{\Sigma}{R}_{\beta\delta} = \frac{1}{2}(-k_\mu u^\mu)^{-1}\left\{\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta - \cancel{\gamma^{\beta}_{\beta}}^{(0)} + \cancel{\gamma^{\alpha}_{\alpha}}^{(0)} + \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta\right\}$$

$$\Rightarrow \underset{\Sigma}{R} = (-k_\mu u^\mu)^{-1}\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \ \checkmark$$

$$\underset{\Sigma}{G}_{\alpha\beta} = \underset{\Sigma}{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\underset{\Sigma}{R}\,g_{\alpha\beta}$$

صورتاً

singular

$$= \frac{1}{2}(-k_\mu u^\mu)^{-1}\left\{\gamma^{\alpha}_{\delta}k_\alpha k_\beta - \gamma^{\alpha}_{\alpha}k_\beta k_\delta + \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k_\delta - g_{\beta\delta}\gamma_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\right\}$$

$$\& \quad \underset{\Sigma}{G}_{\beta\delta} = 8\pi\,\underset{\Sigma}{T}_{\beta\delta}$$

$$= 8\pi(-k_\mu u^\mu)^{-1}S_{\beta\delta}\,\delta(\tau)$$

$$,\ S_{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi}\left(\gamma^{\mu}_{\alpha}k_\beta k_\mu - \gamma^{\mu}_{\mu}k_\alpha k_\beta + \gamma^{\mu}_{\beta}k_\alpha k_\mu - g_{\alpha\beta}k^\mu k^\nu\gamma_{\mu\nu}\right)$$

رابطه بعد از (۳-۹۷)

می‌خواهیم این تانسور انرژی تکانه را با شاره کامل مقایسه کنیم. (آن را به صورت تانسور انرژی تکانه سیال کامل در بیاوریم.)

همگن و همسانگرد بودن فضا ایجاب می‌کند perfect fluid source باشد.

برای سیاه‌چاله‌ی چرخان داریم: $\begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & -p_r & & \\ & & -p_t & \\ 0 & & & -p_t \end{pmatrix}$

برای این کار، کمیت‌های جدید را تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_A \equiv \gamma_{\alpha\beta} e^\alpha_A k^\beta \checkmark$$

,

$$\gamma_{AB} = \gamma_{\alpha\beta} e^\alpha_A e^\beta_B \checkmark$$

,

$$\gamma^\alpha_\mu k^\mu = \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu_\mu - \sigma^{AB}\gamma_{AB})k^\alpha + (\sigma^{AB}\gamma_B)e^\alpha_A$$

$$-(\gamma_{\mu\nu}k^\mu k^\nu)N^\alpha \checkmark$$

رابطه ۱

اثبات این رابطه راحت انجام می‌شود:)

می‌توانیم از سمت راست شروع کنیم و به سمت چپ برسیم:

$$RHS = \tfrac{1}{2}\gamma^\mu_\mu k^\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^{AB}\gamma_{\alpha'\beta} e^{\alpha'}_A e^\beta_B k^\alpha + \sigma^{AB}\gamma_{\alpha'\beta} e^{\alpha'}_B k^\beta e^\alpha_A$$

$$-\gamma_{\mu\nu}k^\mu k^\nu N^\alpha \qquad (۲)$$

از رابطه‌ی completeness هم استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^{AB} e^\alpha_A e^\beta_B = g^{\alpha\beta} + k^\alpha N^\beta + k^\beta N^\alpha$$

در رابطه ۲ می‌گذاریم ←

$$= \tfrac{1}{2}\gamma^\mu_\mu k^\alpha - \tfrac{1}{2}(g^{\alpha'\beta} + k^{\alpha'}N^\beta + k^\beta N^{\alpha'})\gamma_{\alpha'\beta}k^\alpha$$

$$+(g^{\alpha\alpha'} + N^\alpha k^{\alpha'} + N^{\alpha'}k^\alpha)\gamma_{\alpha'\beta}k^\beta - \gamma_{\mu\nu}k^\mu k^\nu N^\alpha$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}\gamma^\mu_\mu k^\alpha} - \cancel{\tfrac{1}{2}\gamma^\beta_\beta k^\alpha} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\alpha'\beta}k^{\alpha'}k^\alpha N^\beta - \tfrac{1}{2}\gamma_{\alpha'\beta}k^\beta N^{\alpha'}k^\alpha$$

$$+\gamma^\alpha_\beta k^\beta + \cancel{\gamma_{\alpha'\beta}k^\beta k^{\alpha'}N^\alpha} + \gamma_{\alpha'\beta}N^{\alpha'}k^\alpha k^\beta - \cancel{\gamma_{\mu\nu}k^\mu k^\nu N^\alpha}$$

$\gamma_{\alpha'\beta} = \gamma_{\beta\alpha'}$

$$= -\gamma_{\alpha'\beta} \cancel{K^{\alpha'} N^{\beta} K^{\alpha}} + \gamma^{\alpha}{}_{\beta} K^{\beta} + \gamma_{\alpha'\beta} \cancel{N^{\alpha'} K^{\beta} K^{\alpha}}$$

$$\downarrow \; \gamma_{\beta\alpha'} N^{\beta} K^{\alpha'} K^{\alpha}$$

$$= \gamma^{\alpha}{}_{\beta} K^{\beta} \checkmark$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi} \Big\{ K^{\alpha} \Big[\tfrac{1}{4} \big(\cancel{\gamma^{\mu}{}_{\mu}} - \sigma^{AB} \gamma_{AB} \big) K^{\beta} + \big(\sigma^{AB} \gamma_{B} \big) e^{\beta}_{A}$$

$$- \big(\gamma_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} \big) N^{\beta} \Big]$$

$$+ K^{\beta} \Big[\tfrac{1}{4} \big(\cancel{\gamma^{\mu}{}_{\mu}} - \underline{\sigma^{AB} \gamma_{AB}} \big) K^{\alpha} + \big(\sigma^{AB} \gamma_{B} \big) e^{\alpha}_{A}$$

$$- \big(\gamma_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} \big) N^{\alpha} \Big] - \cancel{\gamma^{\mu}{}_{\mu} K^{\alpha} K^{\beta}} - \gamma_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} g^{\alpha\beta} \Big\}$$

$$= \frac{1}{16\pi} \Big\{ -K^{\alpha} K^{\beta} \sigma^{AB} \gamma_{AB} + \underline{\sigma^{AB} \gamma_{B}}^{*} \big(e^{\alpha}_{A} K^{\beta} + e^{\beta}_{A} K^{\alpha} \big)$$

$$- \gamma_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} \big(N^{\alpha} K^{\alpha} + N^{\alpha} K^{\beta} \big) - \gamma_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} g^{\alpha\beta} \Big\}$$

* چگالی جریان سطحی (تنش برشی)

$$= \frac{1}{16\pi} \Big\{ -K^{\alpha} K^{\beta} \sigma^{AB} \gamma_{AB} + \sigma^{AB} \gamma_{B} \big(e^{\alpha}_{A} K^{\beta} + e^{\beta}_{A} K^{\alpha} \big)$$

$$- \gamma_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} \underbrace{\big(N^{\alpha} K^{\alpha} + N^{\alpha} K^{\beta} + g^{\alpha\beta} \big)}_{\sigma^{AB}} \Big\}$$

رسته رابطه $\big(D_{m} - D_{m} = \sigma$:

چگالی انرژی سطحی

$$\mu \equiv -\frac{1}{16\pi} \sigma^{AB} \gamma_{AB}$$

جریان سطحی

$$j^{A} = \frac{1}{16\pi} \sigma^{AB} \gamma_{B} \;, \quad p \equiv -\frac{1}{16\pi} \gamma_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu}$$

فشار سطحی عمانرد

$$\Rightarrow S^{\alpha\beta} = \mu k^\alpha k^\beta + (e^\alpha_A k^\beta + e^\beta_A k^\alpha) j^A + p\sigma^{\alpha\beta} \checkmark$$

surface energy density ← μ

perfect fluid ← $p\sigma^{\alpha\beta}$ شبیه تانسور انرژی تکانه

$S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$

مثلاً اگر null shell ← غبار ← $p = j = 0$ ✓

p (فشار سطحی)

تصحیح شد ۸۹/۱۱/۱۲

قبلاً با extrinsic curvature کار کردیم: $K_{\alpha\beta} = n_{\alpha;\beta}$ ولی در اینجا

$(K_{ab} = K_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b)$ اینجا کار نمی‌کنیم

قرار است شبیه این کار را انجام داد با انحنای عرضی (transverse curvature)

$$C_{ab} \equiv \frac{1}{2}(N_{\alpha;\beta} + N_{\beta;\alpha}) e^\alpha_a e^\beta_b \checkmark$$

چون k^α که بردار null است هم عمود هم مماس بر ابرسطح است، نمی‌توان C را بر حسب آن تعریف کرد ← یعنی اطلاعاتی راجع به انحنای خارجی به ما نمی‌دهد ← با N کار می‌کنیم.

$$\mathcal{L}_N g_{\alpha\beta} = N^\mu \overset{0}{g_{\alpha\beta;\mu}} + N^\mu_{;\alpha} g_{\mu\beta} + N^\mu_{;\beta} g_{\mu\alpha}$$

$(N^\mu g_{\mu\beta})_{;\alpha}$

$$= N_{\beta;\alpha} + N_{\alpha;\beta}$$

$$N_\alpha e^\alpha_a = \begin{cases} -1 & \sim e^\alpha_\lambda \\ 0 & \sim e^\alpha_A \end{cases}$$

$N_\alpha k^\alpha = -1 \rightarrow N_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = -1$

e^α_λ

مشتق گرفتیم

$$\Rightarrow N_{\beta;\alpha} e^\beta_b + N_\beta e^\beta_{b;\alpha} = 0 \checkmark$$

Subject: ۸ | کار با GR tensor دستورات اشتراکی (kerr

Year. Month. Date. ( ) | ۹ جلسه نهم - ۹۹ سال

$$\Rightarrow S^{\alpha\beta} = \mu k^\alpha k^\beta + (e^\alpha_A k^\beta + e^\beta_A k^\alpha) j^A + p\sigma^{\alpha\beta}$$

surface energy density ← μ

مشابه تانسور انرژی تکانه ی perfect fluid

$$S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$$

مثلاً اگر null shell → غبار ← $p=j=0$

p (فشار روی پوسته)

جلسه دوم ۹۹/۱۱/۱۲

قبلاً با extrinsic curvature کار می کردیم: $K_{\alpha\beta}=n_{\alpha;\beta}$ ولی در اینجا با آن کار نکردیم ($K_{ab}=K_{\alpha\beta}e^\alpha_a e^\beta_b$).

می توان شبیه این کار را انجام داد با انحنای عرضی (transverse curvature)

$$C_{ab} \equiv \frac{1}{2}(N_{\alpha;\beta}+N_{\beta;\alpha})e^\alpha_a e^\beta_b$$

(چون k^α یک بردار null است و هم عمود و هم مماس بر ابررویه است، نمی توان C را برحسب آن تعریف کرد → یعنی اطلاعاتی راجع به انحنای خارجی به ما نمی دهد → با N کار می کنیم.)

$$\mathcal{L}_N g_{\alpha\beta} = N^\mu \cancel{g_{\alpha\beta;\mu}}^{\,0} + \underbrace{N^\mu{}_{;\alpha} g_{\mu\beta}}_{(N^\mu g_{\mu\beta})_{;\alpha}} + N^\mu{}_{;\beta} g_{\mu\alpha}$$

$$= N_{\beta;\alpha} + N_{\alpha;\beta}$$

$$N_\alpha e^\alpha_a = \begin{cases} -1 & \sim e^\alpha_\lambda \\ 0 & \sim e^\alpha_A \end{cases}$$

$$N_\alpha k^\alpha = -1 \to N_\alpha \underbrace{\frac{dx^\alpha}{d\lambda}}_{e^\alpha_\lambda} = -1$$

مشتق می گیریم

$$\Rightarrow N_{\beta;\alpha}e^\beta_b + N_\beta e^\beta_{b;\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow C_{ab} = -\tfrac{1}{2}\left(N_\alpha e^\alpha_{a;\beta}\, e^\beta_b + N_\beta e^\beta_{b;\alpha}\, e^\alpha_a\right)$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \rightsquigarrow N_\alpha e^\alpha_{b;\beta}\, e^\beta_a$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(N_\alpha e^\alpha_{a;\beta}\, e^\beta_b + N_\alpha e^\alpha_{b;\beta}\, \cancel{e^\beta_b}\, e^\beta_a\right)$$

$$= -N_\alpha e^\alpha_{a;\beta}\, e^\beta_b$$

(باید C_{ab} symmetric باشد)

$$e^\alpha_{a;\beta}\, e^\beta_b \overset{?}{=} e^\alpha_{b;\beta}\, e^\beta_a$$ (نشان دهیم .)

از مشتق Lie استفاده کنیم: با
مشتق Lie هرکدام از بردارهای مماس در امتداد دیگری صفر است.

$$\mathcal{L}_{e^\alpha_a} e^\beta_b = e^\alpha_{a;\beta}\, e^\beta_b - e^\alpha_{b;\beta}\, e^\beta_a = 0 = \mathcal{L}_{e^\beta_b} e^\alpha_a$$

$$\rightsquigarrow e^\alpha_{a;\beta}\, e^\beta_b = e^\alpha_{b;\beta}\, e^\beta_a \checkmark$$

می‌خواهیم $\Sigma^{\alpha\beta}$ را برحسب C_{ab} بنویسیم:

$$C_{ab} = N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_a\, e^\beta_b \checkmark$$

a, b در λ, θ^A

مؤلفه‌های C_{ab}:

$C_{\lambda\lambda}$
$C_{\lambda A}$
C_{AB}

$$[C_{ab}] = [N_{\alpha;\beta}]\, e^\alpha_a\, e^\beta_b$$

براکت مشتق هموردا = صفر ✓

$$N_{\alpha;\beta} = N_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} N_\gamma$$

می‌توان coordinate system ای را انتخاب کرد (در x^α) که continuous باشد)

$\hookrightarrow \quad [N_{\alpha,\beta}] = 0$

$$\Rightarrow [N_{\alpha;\beta}] = -[\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}] N_\gamma$$

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} (g_{\lambda\alpha,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda})$$

$$[\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} ([g_{\lambda\alpha,\beta}] + [g_{\lambda\beta,\alpha}] - [g_{\alpha\beta,\lambda}])$$

$$, \ \gamma_{\alpha\beta} = [g_{\alpha\beta,\gamma}] N^\gamma$$

3.94: $[g_{\alpha\beta,\gamma}] = -\gamma_{\alpha\beta} k_\gamma$

$$\Rightarrow [c_{ab}] = \frac{1}{2} (\gamma^\gamma_\alpha k_\beta + \gamma^\gamma_\beta k_\alpha - \gamma_{\alpha\beta} k^\gamma) N_\gamma e^\alpha_a e^\beta_b$$

$k_\beta e^\beta_b = 0 , \ k^\alpha e^\alpha_a = 0$

$$\Rightarrow [c_{ab}] = -\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \underbrace{k^\gamma N_\gamma}_{-1} e^\alpha_a e^\beta_b$$

$$\rightarrow [c_{ab}] = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \checkmark$$

رابطه‌ی بین ناپیوستگی در انحنای عرضی و ناپیوستگی در مشتق metric

$\hookrightarrow \gamma_{\alpha\beta} = [g_{\alpha\beta,\gamma}] N^\gamma$

$$[c_{\lambda\lambda}] = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} e^\alpha_\lambda e^\beta_\lambda = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta$$

$$[c_{\lambda A}] = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha e^\beta_A = \frac{1}{2} \gamma_A$$

$$[c_{AB}] = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} e^\alpha_A e^\beta_B = \frac{1}{2} \gamma_{AB}$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{1}{16\pi}\alpha^{AB}\gamma_{AB} = \frac{-1}{8\pi}\alpha^{AB}[C_{AB}]$$

$$j^A = \frac{1}{16\pi}\alpha^{AB}\gamma_B = \frac{1}{8\pi}\alpha^{AB}[C_{\lambda B}]$$

$$P = -\frac{1}{16\pi}\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = -\frac{1}{8\pi}[C_{\lambda\lambda}]$$

حذف : Section 3.11, ~~8~~ 5

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 : \text{affine}$$ پارامتر

پارامتر nonaffine ← سمت راست $\neq 0$ (باقیست)

perfect fluid ← واینبرگ) : برای ذرات کاملاً random :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}$$

اگر ذرات random باشند ← یک تابع توزیع $f(x, p)$ داشته باشیم

← $T^{\alpha\beta}$ چگونه حاصل می‌شود؟ در کتاب ... reference اش را دارد.

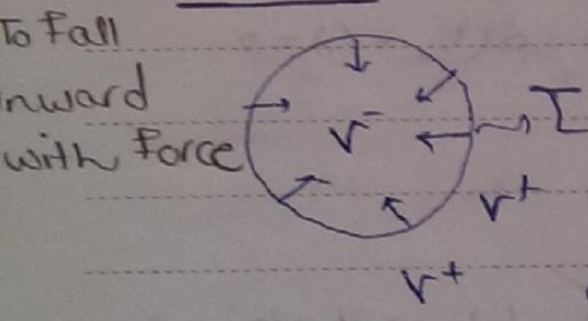
Imploding spherical shell

↓ **Example:**

پوسته کروی در حال رمبش که در فضا حرکت می‌کند

← ابر رویه ۳ بعدی : $\lambda, (\theta, \phi) : \theta^A$

$$y^a = (\lambda, \theta, \phi)$$



فیزیکی : پالس‌های لیزری به صورت کروی یک کره روشن و خاموش شوند : ← به سمت مرکز می‌رود.

Fusion : یک عدد هیدروژن را در مرکز کره‌ای که با پالس‌ها لیزری احاطه شده قرار می‌دهند ← واکنش‌های Fusion رخ می‌دهند.

← پالس‌ها باید کوتاه مدت باشند.

پالس‌ها باید کوتاه مدت باشند در غیر این صورت پوسته مشخص نخواهیم داشت:
← نمی‌توان پوسته را به فرم دلتای Dirac نمایش داد.

در داخل: فضای Flat

$$ds_-^2 = -dt_-^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

در بیرون: متریک Sch. (استفاده کرده)

$$ds_+^2 = -f\,dt_+^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad f = 1 - \frac{2m}{r}$$

توسط فوتون‌ها با انرژی وارد شد ← جرم و انرژی حاصل از ← Sch.
چون coordinate ها قابل تطابق نیستند ← از t_- و t_+ استفاده کرده.

(متریک Sch. جواب خلأ معادلات Einst. است ← در دو حالت‌هایی می‌خورد که $\rho = P = 0$ یعنی بیرون از جرم.)

وارد خورشید که می‌شویم، دیگر نمی‌توان از متریک Sch. استفاده کرد
← جرم داریم.)
(برای سیاه‌چاله چون شعاع کوچکتر از شعاع Sch. است ← افق رویداد داریم.)

رو به داخل $\quad dr = -dt_- \quad$ سرعت پوسته $= c$

$$v_-: \quad v_{shell} = \pm c = \frac{dr}{dt_-} = -1 \Rightarrow d(t_- + r) = 0$$

$$\Sigma_-: \Rightarrow t_- + r = const. = v_-$$

t_-: زمان از دید ناظر ساکن درون v^-: $\quad d\tau^2 = dt_-^2$

t_+: زمان از دید ناظر ساکن در v^+: $\quad d\tau^2 = f\,dt_+^2$
که با یک ضریب $\sqrt{f}$

← t_+ و t_- متفاوت‌اند. ارتباط آن‌ها را به کمک junction condi. ها.

بدون اثبات می‌پذیریم که پارامتر λ، affine است (می‌توان نشان داد).

$\lambda = -r(t)$

$\theta^A = (\theta, \varphi)$

معادله پارامتری ابررویه Σ_-

$$\Sigma_- : \begin{cases} t_- = v_- + \lambda \\ r = -\lambda \\ \theta = \theta \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

$x^\mu(y^a)$

۴ مختصه وابسته به ۳ مختصه ← داریم

← توصیف شده‌ی ابررویه

$$k^\alpha = e^\alpha_\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} = (1,-1,0,0)$$

$$\text{or: } k^\alpha \partial_\alpha = \partial_t - \partial_r$$

$$e^\alpha_A = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A}, \quad e^\alpha_\theta = \delta^\alpha_\theta, \quad e^\alpha_\varphi = \delta^\alpha_\varphi$$

می‌توان N_α را به صورت روبرو در نظر گرفت: $N_\alpha = (N_0, N_1, 0, 0)$

$$N_\alpha N^\alpha = g^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta = -N_0^2 + N_1^2 = 0 \;\rightsquigarrow\; N_1 = \pm N_0 \quad (1)$$

$$N^\alpha k_\alpha = -1 \quad (N_\alpha k^\alpha = -1)$$

$$(1)N_0 + (-1)N_1 = -1 \;\rightsquigarrow\; N_0 - N_1 = -1 \quad (2)$$

حل معادله (۱)، (۲) ← $N_1 = -N_0$

$$N_0 = -1/2, \quad N_1 = +1/2$$

$$N_\alpha = \tfrac{1}{2}(-1,1,0,0)$$

$$c_{ab} = N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_a\, e^\beta_b$$

$$c_{AB} = N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_A\, e^\beta_B = N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_\theta\, e^\beta_\theta + \cancel{N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_\theta\, e^\beta_\phi} + \cancel{N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_\phi\, e^\beta_\theta} + N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_\phi\, e^\beta_\phi$$

$$c_{\theta\theta} = N_{\alpha;\beta}\, e^\alpha_\theta\, e^\beta_\theta = N_{\theta;\theta} = \cancelto{0}{N_{\theta,\theta}} - \Gamma^\lambda_{\theta\theta} N_\lambda$$

$$= -\Gamma^t_{\theta\theta} N_t - \Gamma^r_{\theta\theta} N_r$$ از رابطهٔ دیفرانسیل هموردا استفاده کرد:

$$= +\tfrac{1}{2}\Gamma^t_{\theta\theta} - \tfrac{1}{2}\Gamma^r_{\theta\theta}$$

$$\Gamma^t_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^t_{\theta\phi} = 0, \quad \Gamma^\gamma_{\theta\phi} = 0$$
$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta, \quad \Gamma^t_{\phi\phi} = 0$$

$$\Rightarrow c_{\theta\theta} = \tfrac{1}{2} r, \qquad c_{\phi\phi} = \tfrac{r}{2}\sin^2\theta$$
$$c_{\theta\phi} = c_{\phi\theta} = 0$$ باقی cها صفر

مقایسه با $\bar{c}_{AB}$:

$$ds^2 = \sigma_{AB}\, d\theta^A d\theta^B = r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{AB} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{c}_{AB} = \tfrac{1}{2r}\sigma_{AB} \checkmark$$

$$c_{AB} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} r & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} r\sin^2\theta \end{pmatrix}$$