(6)

Quantum Field Theory II

جلسه دوم

$$S=\int L\,(\phi,\ \partial_\mu\phi,\ x_\mu)\,d^4x$$

تبدیلات میدان و مختصات (مرزی) :

$$\begin{cases}\phi(x)\longrightarrow\phi'(x)=\phi(x)+\delta\phi(x) & (*)\\ x^\mu\longrightarrow x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu\end{cases}$$

ناوردایی $S\longrightarrow S$

$\Delta S=0$

$$\Longrightarrow\ \delta S=\int_R\left\{\frac{\partial L}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\}\delta\phi\,d^4x+\int_{\partial R}\cdots$$

∂R مرز

مکانیک کلاسیک

$(q_i(t),\ t)\longrightarrow(\phi(x^\mu),\ x^\mu)$

t: پارامتر ، x^μ: پارامتر

نظریه میدان

ϕ: متغیرهای دینامیکی

if $\delta x^\mu=0$, $\delta\phi\big|_{\partial R}=0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0$$

- تحت تبدیلات (*) هر دو جمله مرزی باقی می‌ماند.

$$\Longrightarrow\ \delta S=\int_{\partial R}\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\underbrace{(\delta\phi+\partial_\nu\phi\,\delta x^\nu)}_{\Delta\phi}-\Theta^{\mu\nu}\,\delta x_\nu\right\}d\sigma_\mu=0\qquad(\mathrm{I})$$

$\Delta\phi$: تغییر کلی ϕ

δx_ν: تغییر کلی x

که $$\Theta^{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi-g^{\mu\nu}L$$

energy-momentum tensor

فرض کنیم $\delta S=0$ (تحت این تبدیلات)

تعریف total variation : $\Delta\phi=\phi'(x')-\phi(x)$

ادعا: چیزی که در جمله اول (I) آمده همان $\Delta\phi$ تعریف شده است:

1/ راه $\Longrightarrow$ $$\Delta\phi=\underbrace{\phi'(x')-\phi(x')}_{\delta\phi(x')}+\underbrace{\phi(x')-\phi(x)}\longrightarrow(\partial_\mu\phi)\,\delta x^\mu$$

از بسط $$\phi(x')=\phi(x)+(\partial_\mu\phi)\underbrace{(x'^\mu-x^\mu)}_{\delta x^\mu}+O(x'-x)^2\Longrightarrow$$

$$\delta\phi(x')=\delta\phi(x)+\cancel{\delta[\partial_\mu\phi\,\delta x^\mu]}\longrightarrow\delta\phi(x')=\delta\phi(x)$$

$$\cancel{\delta[\partial_\mu\phi\,\delta x^\mu]}\longrightarrow O(\delta^2)=0$$

$\Delta x_\mu = X_{\mu\vec{\nu}}\, \delta \omega^{\vec{\nu}} \rightarrow$ پارامتر تبدیل (**)

هر تبدیلی، پارامتر تبدیل دارد

, $\Delta\phi = \Theta_{\vec{\nu}}\, \delta\omega^{\vec{\nu}}$ فرض: تحت این تبدیل‌ها $\rightarrow \delta S = 0$

$$\xrightarrow{(**,\ I)} 0 = \int_{\underset{\text{دلخواه}}{\partial R}} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Theta_\nu - \theta^{\mu\nu} X_{\mu\nu} \right] \overbrace{\delta\omega^{\nu}}^{\text{دلخواه}} d\sigma_\mu$$

پس

$$J^{\overset{\text{فضای}}{\mu}}_{\ \vec{\nu}} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Theta_{\vec{\nu}} - \theta^{\overset{\text{فضای}}{\mu k}} X_{k\vec{\nu}} \Longrightarrow \int_{\partial R} J^\mu_{\ \nu}\, d\sigma_\mu = 0$$

لورنتسی گروهی
(در گروه تبدیلات قرار دارد)

از طرفی $\int \nabla\cdot J\, dv = \int \underbrace{\vec{J}}_{J_i}\cdot \underbrace{\hat{n}\, ds}_{d\sigma_i} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_R \partial_\mu J^\mu_{\ \nu}\, d^4x = 0 \Longrightarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu_{\ \nu} = 0}$$

R اختیاری

حال $Q_\nu = \int J^0_{\ \nu}\, d^3x$ از طرفی $\int \partial_\mu J^\mu_{\ \nu}\, d^3x = 0 \Rightarrow$

$$\to \int \partial_0 J^0_{\ \nu}\, d^3x + \underbrace{\int \partial_i J^i_{\ \nu}\, d^3x}_{\int_\sigma J^i_{\ \nu}\, d\sigma^i} = 0$$

دیورژانس

if $V \to \infty \Longrightarrow$ سطح $\sigma \to \infty$

روی کل فضای سه بعدی

مرز فضای سه بعدی

$\Longrightarrow J^i_{\ \nu} = 0$

میدان‌ها صفر خواهند شد

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\int_V J^0_{\ \nu}\, d^3x = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt} Q_\nu = 0$$

اصل بقای بار

پس اگر تبدیلی داشته باشیم که تحت آنها کنش ناوردا باشد آنگاه حتماً یک Conserved current و conserved charge خواهیم داشت. (قضیه نوتر) Nother's theorem

③

$$g_{\nu\alpha}\left\{\theta^{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi-g^{\mu\nu}L\right\}\longrightarrow\theta^\mu_\alpha=\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\alpha\phi-\delta^\mu_\alpha L$$

بنابراین $\theta^0_0=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\dot\phi-L=\mathcal{H}\longrightarrow$ چگالی هامیلتونی

$\boxed{P_\nu=(E,\vec P)}$

$\Longrightarrow\int\theta^0_0\,d^3x=$ انرژی $=P_0\longrightarrow\theta^0_i=P_i\longrightarrow\theta^0_\nu=P_\nu$

اصل بقای مومنتوم نتیجه قضیه نوتر

~~ضرورتا~~ ضرورتا $\theta^{\mu\nu}\neq\theta^{\nu\mu}$ متقارن نیست $\longrightarrow\theta\longrightarrow T^{\mu\nu}$ که $T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$

(بنابراین به لحاظ فیزیکی خوش رفتار نیست)

تانسور انرژی تکانه

پس $T^{\mu\nu}=\theta^{\mu\nu}+\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}\longrightarrow$

۱ـ f باید متقارن به ν,μ باشد

۲ـ نسبت به اندیس اول و دومی پادمتقارن باشد

$f^{\lambda\mu\nu}=-f^{\mu\lambda\nu}$

در مورد انتگرال $J^{\mu\nu}=-\theta^{\mu\nu}\longrightarrow\partial_\mu J^{\mu\nu}=0\longrightarrow\partial_\mu\theta^{\mu\nu}=0$ همواره باید برقرار باشد

حال $\partial_\mu T^{\mu\nu}=\underbrace{\partial_\mu\theta^{\mu\nu}}_{0}+\underbrace{\partial_\mu\partial_\lambda}_{\text{متقارن}}\underbrace{f^{\lambda\mu\nu}}_{\text{پادمتقارن}}=0$

$=0$

پس $\int T^{0\mu}d^3x=\int\theta^{0\mu}d^3x+\int\partial_\lambda f^{\lambda 0\mu}d^3x\longrightarrow\int_{(\infty)\text{ مرز}}f^{i0\mu}\,d\sigma_i$

i باید باشد

$=P^\mu$

در ∞ میدانها صفر اند

سوال: حال چرا باید $T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$ برقرار باشد؟

مثال:

$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \overset{\text{مقدار ثابت}}{\epsilon_\mu}$

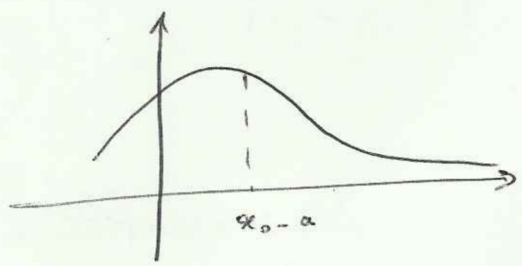
$\begin{cases} \Delta x_\mu = \epsilon_\mu \\ \Delta \phi = 0 \end{cases}$ ← تبدیل روبرو

میخواهیم $S \to S$ نباید مسئله به انتخاب مبدأ بستگی داشته باشد.

قضیه: هرگاه $x \to x' = f(x) \Longrightarrow \boxed{\phi(x) \to \phi \circ f^{-1} = \phi\left[f^{-1}(x)\right]}$

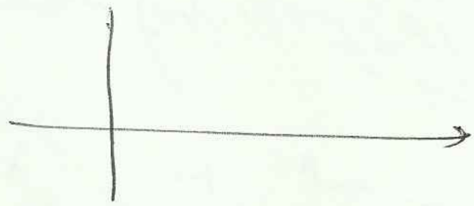
تحت دو تبدیل پی‌درپی ←

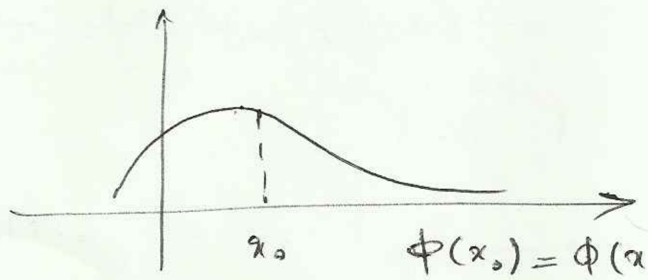
$x \to f \to g\circ f \Longrightarrow \phi \to \phi\circ f^{-1} \to \phi \circ f^{-1} \circ g^{-1} = \phi \circ (g \circ f)^{-1}$



فرض $\Longrightarrow$

$x \to x' = x + a$





$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x-a)$

$\phi(x_0) = \phi(x_0 - a)$

$\Rightarrow \phi'(x' = x + a) = \phi(x)$

$\Delta\phi = 0$ تحت تبدیلات متغیرها $\Delta\phi$ می‌تواند صفر باشد با اینکه این تغییرات، تغییراتی روی ϕ اعمال می‌کنند

حال $\delta \omega^\nu = \epsilon^\nu$ و $\delta x_\mu = X_{\mu\nu}\epsilon^\nu = \epsilon_\mu \Rightarrow X_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$

$\Rightarrow X_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, $\Phi_\nu = 0 \Longrightarrow J^\mu{}_\nu = -\theta^{\mu k} g_{k\nu} = -\theta^\mu{}_\nu$

پس در این مورد J، همان θ است

و $Q_\nu = \int J^0{}_\nu \, d^3x = -\int \underbrace{\theta^0{}_\nu}_{\text{چگالی چاربردار تکانه}} d^3x = -P_\nu$

تحت تبدیلات لورنتس عام → (boost و دوران)

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \quad (\dagger)$$ که $\epsilon^{\mu\nu}$ کاملاً پادمتقارن

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cdot & & & \vdots \\ & \cdot & & \vdots \\ & & \cdot & \vdots \\ & & & \cdot \end{pmatrix}$$ (پارامتر تبدیل)

چگونه تحت این تبدیلات (لورنتس) پارامترها پادمتقارن از آب در می‌شوند

حول محور z

$$\begin{cases} X'^0 = X^0 \\ X'^1 = X^1\cos\theta + X^2\sin\theta \simeq x^1 + \theta x^2 = x^1 - \theta x_2 \\ X'^2 = -X^1\sin\theta + X^2\cos\theta \simeq x^2 - \theta x^1 = x^2 + \theta x_1 \\ X'^3 = X^3 \end{cases}$$

$$A^\mu = (A^0, \vec{A})$$

$$A_\mu = (A^0, -\vec{A})$$

$$\xrightarrow[\text{پس}]{(\dagger)} \epsilon^{12} = -\theta_3 = -\epsilon^{21}$$

پس معلوم شد یکی اش

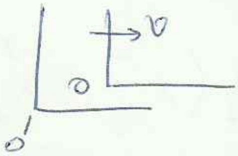
$$\epsilon^{23} = -\theta_1 = -\epsilon^{32}, \quad \epsilon^{31} = -\theta_2 = -\epsilon^{13}$$

پس ماهیت پادمتقارن بودن پارامترها معلوم شد

در مورد دورانها

در مورد boost

book notation →



$$\begin{cases} x' = \gamma(x + vt) \\ t' = \gamma\left(t + \frac{v x}{c^2}\right) \\ y' = y, \; z' = z \end{cases}$$

$$\frac{v}{c} = \beta, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$X^{0'} = \overbrace{\cosh\phi}^{1} X^0 + \overbrace{\sinh\phi}^{\phi} X^1$$

$$X^{1'} = \sinh\phi X^0 + \cosh\phi X^1$$

$$X'^2 = X^2$$

$$X'^3 = X^3$$

که $\gamma = \cosh\phi$

$\gamma\beta = \sinh\phi$

سرعت در جهت محور xها کم است

به سرعت اندیس می‌دهیم (ϕ_1)

$$\Longrightarrow \begin{cases} X'^0 = X^0 - \phi_1 x_1 \\ X'^1 = X^1 + \phi_1 X_0 \\ X'^2 = X^2 \\ X'^3 = X^3 \end{cases} \xrightarrow{(\dagger)} \begin{aligned} \epsilon^{01} &= -\epsilon^{10} = -\phi_1 \\ \epsilon^{02} &= -\epsilon^{20} = -\phi_2 \\ \epsilon^{03} &= -\epsilon^{30} = -\phi_3 \end{aligned}$$

پس $\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\phi_1 & -\phi_2 & -\phi_3 \\ \phi_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \phi_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \phi_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}$ پس $\begin{cases} \Delta x^\mu = \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \\ \Delta\phi = 0 \end{cases}$

فرض می‌کنیم Field ها تحت تبدیل لورنتس اسکالر باشند و ($\phi \longrightarrow \phi$)

$$\Delta x^\mu = X^\mu_{\vec\nu}\,\delta\omega^{\vec\nu} = X^\mu_{\rho\sigma}\,\epsilon^{\rho\sigma}$$ پس $X^\mu_{\rho\sigma} = \delta^\mu_\rho\, x_\sigma$

or $X^{\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho} X^\sigma$, $\Theta_{\vec\nu} = 0$

پس $\begin{cases} X^{\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho} x^\sigma \\ \Theta_{\vec\nu} = 0 \end{cases}$ فرض می‌کنیم $\phi \xrightarrow{L.T} \phi$

$$\Longrightarrow J^{\mu\vec\nu} = -T^\mu{}_k X^{k\vec\nu}, \quad J^{\mu\rho\sigma} = -T^\mu{}_k X^{k\rho\sigma} = -T^{\mu\rho} x^\sigma$$

حال $X^\mu_{\rho\sigma}\,\epsilon^{\rho\sigma} = \Big[\underbrace{\tfrac12\big(X^\mu_{\rho\sigma} + X^\mu_{\sigma\rho}\big)}_{\rho\leftrightarrow\sigma \text{ متقارن تحت}} + \underbrace{\tfrac12\big(X^\mu_{\rho\sigma} - X^\mu_{\sigma\rho}\big)}_{\text{پادمتقارن}}\Big]\underbrace{\epsilon^{\rho\sigma}}_{\text{پادمتقارن}}$

بخاطر پادمتقارن بودن $\epsilon^{\mu\nu}$ $\Longrightarrow J^{\mu\rho\sigma} = -\frac12 T^\mu{}_k\big(X^{k\rho\sigma} - X^{k\sigma\rho}\big) = -\frac12\big(T^{\mu\rho}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\rho\big)$ (*)

حال اولاً $\partial_\mu J^{\mu\rho\sigma} = 0$ $\boxed{\text{از قبل } \partial_\mu T^{\mu\rho} = 0 \text{ و } \partial_\mu x^\sigma = \delta^\sigma_\mu}$

$$\Longrightarrow -\frac12\big(T^{\sigma\rho} - T^{\rho\sigma}\big) = 0 \Rightarrow \boxed{T^{\sigma\rho} = T^{\rho\sigma}}$$

طبق قضیه نوتر

– تبدیلات لورنتس به ما اعمال می‌کند که تانسور انرژی – مومنتوم متقارن باشد.

$$M^{\mu\vec\nu} = M^{\mu\rho\sigma} = T^{\mu\rho}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\rho, \quad J^{\mu\rho\sigma} = -\frac12 M^{\mu\rho\sigma}$$ $\longleftarrow$ به (*) دقت می‌کنیم

$$M^{\mu\nu} = \int M^{0\mu\nu} d^3x$$ اوّلاً $$\frac{d}{dt} M^{\mu\nu} = 0$$ $M^{\mu\nu}$ ها پایسته هستند

$\downarrow$

$\underbrace{M^{ij}}_{\text{مولفه‌های تکانه زاویه‌ای}}$ $(i \neq j)$ پس

$\underbrace{M^{0i}}$ و (ناورداهای حاصل از boost) به مختصات مرکز جرم سیستم شکل داده

- تکانه‌ها متغیرهای حرکتی ناشی از ناوردایی تحت تبدیلات لورنتس و

چون تبدیلات لورنتس دوران و boost هستند پس $M^{\mu\nu}$ ، angular momentum

سیستم هستند ($\underbrace{M^{0i}}_{\text{ناورداهای}}$ ها ناشی از boost هستند)

ایده $J^\mu = (\rho, \vec{J})$, $\vec{J} = \rho \vec{v}$

حال تانسور انرژی مومنتوم را خواهیم ساخت (ایده)

(Weinberg ایده)

مولفه صفرا $T^{\mu 0} = p^\mu$ چگالی که $\int p^\mu d^3x = P^\mu \longrightarrow$ four-momentum

پس $T^{\mu i} = p^\mu v^i \longrightarrow T^{\mu\nu} = p^\mu \frac{dx^\nu}{dt}$ از طرفی

$$\frac{\vec{P}}{E} = \vec{v} \Rightarrow \vec{P} = E\vec{v}$$
$$\longrightarrow P^\mu = E\frac{dx^\mu}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{P^\mu}{E} \Longrightarrow \boxed{T^{\mu\nu} = \frac{P^\mu P^\nu}{E}} \longrightarrow$$ $T^{\mu\nu}$ متقارن بودن معلوم است

حال $$M^{\mu\nu} = \int (T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu) d^3x \Rightarrow M^{ij} = \int (\underset{p^i}{T^{0i}} x^j - \underset{p^j}{T^{0j}} x^i) d^3x$$ مولفه‌های فضایی

(I)

$i=1, j=2 \Rightarrow k=3$

اگر را ط ۱ cyclic k و j و i بگیریم

$$\Longrightarrow M^{ij} = \int \epsilon_{klm} p^l x^m = -\int \mathcal{L}_k d^3x = -L_k = L^k$$

مولفه زمانی $$\xrightarrow{(I)} M^{0i} = \int (\underset{p^0}{T^{00}} x^i - \underset{p^i}{T^{0i}} \underset{t}{x^0}) d^3x = -t \underbrace{\int \overset{\text{چگالی مومنتوم}}{p^i} d^3x}_{P^i} + \int p^0 x^i d^3x$$

ترکیب عجیب و غریب که ثابت حرکت است.

$P^0 \int x^i d^3x \leftarrow$ اگر همه ذرات هم انرژی باشند

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho x \, dV = \frac{1}{V}\int x \, dV = \frac{1}{V}\int \vec{r} \, dV$$

اگر در زمان $t=0$ در نظر بگیریم $M^{0i}=0$

- اگر سیستم تحت تبدیلات پوانکاره (لورنتس و انتقال) ناوردا باشد ← ۱۰ تا پارامتر مستقل خواهیم داشت و ۱۰ تا ثابت حرکت چالب

internal symmetries حرکات دیگر قضیه نوتر را بررسی میکنیم (بوبنا ل)

۲ میدان اسکالر حقیقی ← یک میدان اسکالر مختلط ← یک میدان برداری دو بعدی

(ϕ_1 , ϕ_2)

همه دو مولفه دارند

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

$$\vec{\Phi} = \hat{i}\,\phi_1 + \hat{j}\,\phi_2$$

برای یک میدان اسکالر

$$\mathcal{L}_{\text{اسکالر یک بعدی}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right)$$

برحسب میدانهای مختلط

$$\Rightarrow L_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i \, \partial^\mu \phi_i - m^2 (\phi_i \phi_i)\right) = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$$

(L_2: دو بعدی) برحسب میدانهای حقیقی

$$\text{or} \quad = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \vec{\Phi} \, \partial^\mu \vec{\Phi} - m^2 \vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi}\right)$$

برحسب میدان برداری دو بعدی

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

$$, \ \phi_i = (\phi , \phi^*) \Longrightarrow \begin{cases} \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow (\Box + m^2)\phi^* = 0 \\ \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow (\Box + m^2)\phi = 0 \end{cases}$$

هردو در کلاین-گوردن صدق میکنند

- در اینجا لاگرانژی را داریم و میخواهیم ببینیم internal symmetries کدام ها هستند

$$\left.\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi' &= e^{-i\Lambda}\phi \\ \phi^* \rightarrow \phi^{*\prime} &= e^{i\Lambda}\phi^* \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

که $\Lambda = Cte$

تحت این تبدیل لاگرانژی عوض نمیشود

تبدیل internal هستند (میدانها فقط عوض میشوند مکانها نمیشوند)

تبدیل بی‌نهایت کوچک ← $\Delta\phi = \phi' - \phi = (e^{-i\Lambda} - 1)\phi = -i\Lambda\phi$, $\Delta x^\mu = 0$ چون

$$\Rightarrow \Delta\phi = -i\Lambda\phi \quad \text{و} \quad \Delta\phi^* = i\Lambda\phi^*$$

پس پارامتر تبدیل ← Λ (اندیس قبلی را برمی‌داریم)

$$\Rightarrow \Delta\phi_i = \Theta_i\,\delta\omega \quad \text{و} \quad \Theta_i \rightarrow (\Theta, \Theta^*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Delta\phi = \Theta\Lambda = -i\Lambda\phi \Rightarrow \Theta = -i\phi \\ \Delta\phi^* = \Theta^*\Lambda = i\Lambda\phi^* \Rightarrow \Theta^* = i\phi^* \end{array}\right\} \quad , \quad J^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\Theta_{i\nu} - \theta^{\mu k} X_{k\nu}$$

$X_\mu = 0$

در این صورت

$$\Rightarrow J^\mu = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}}_{\partial^\mu\phi^*}\underbrace{\Theta}_{-i\Lambda} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}}_{\partial^\mu\phi}\Theta^* = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \rightarrow \text{جریان}$$

$\partial_\mu J^\mu = 0$ (معادله کلاین گوردن)

← حاصل از ناوردایی معادله کلاین گوردن تحت تبدیلات داخلی ذکر شده (Λ)

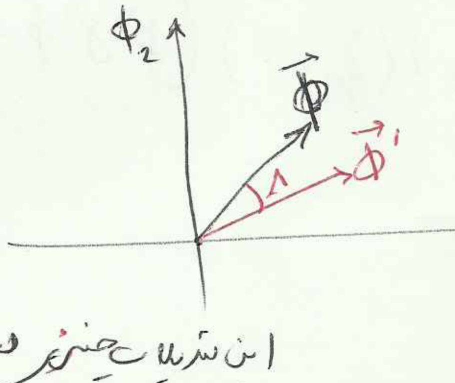
$$Q = \int J^0 d^3x = i\int\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)dv \longrightarrow \text{electrical charg}$$

و برای این تبدیلات

- ذرات اسکالر (بدون اسپین) بدون بار یا میدانهای حقیقی بیان می‌شوند $Q = 0 \leftarrow (\phi = \phi^*)$

پس اگر $\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi'_1 + i\phi'_2) = (\cos\Lambda - i\sin\Lambda)\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi'_1 = \phi_1\cos\Lambda + \phi_2\sin\Lambda \\ \phi'_2 = -\phi_1\sin\Lambda + \phi_2\cos\Lambda \end{cases} \xrightarrow{\text{معنی}}$$



$\rightarrow$ SO(2) or U(1)

این تبدیلات چیزی نیست جز دوران در فضای میدانها

پس گروه تبدیلات ذکر شده $U(1)$ می‌باشد (عدد)

$U(N) = N \times N$ گروه ماتریس‌های یونیتاری

$$U = e^{-i\Lambda} \quad , \quad U^\dagger = e^{i\Lambda} \Rightarrow UU^\dagger = 1$$

- چون پارامتر تبدیل در این مورد ثابت است (برای کل عالم) ← تبدیلات global گویند

اصل بقای بار Ξ ناوردایی لاگرانژی تحت تبدیلات پیمانه‌ای global گروه $U(1)$

- حال تبدیلات پیمانه‌ای local، $U(1)$ را بررسی می‌کنیم:

$\Lambda \longrightarrow \Lambda(x)$ در این مورد $\mathcal{L} \not\longrightarrow \mathcal{L}$!!

$$\Rightarrow \phi \longrightarrow \phi' = e^{-i\Lambda(x)}\phi$$

$$\phi^* \longrightarrow \phi'^* = e^{i\Lambda(x)}\phi^*$$

حال $\delta\mathcal{L} = \delta(\partial_\mu\phi)\partial^\mu\phi^* + \partial_\mu\phi\,\delta(\partial^\mu\phi^*)$

ورودی

فقط روی میدانها تغییر می‌دهد

$\phi\phi^* = 0 \Rightarrow \delta(\phi\phi^*) = 0$ از طرف دیگر $\boxed{\delta\phi = -i\Lambda\phi}$ و اگر Λ تابع مکان نباشد $\Rightarrow$

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda\partial_\mu\phi$$

$$\delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Lambda\partial_\mu\phi^*$$

ولی اگر Λ تابع x باشد $\Rightarrow \delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda\partial_\mu\phi - \underline{i(\partial_\mu\Lambda)\phi}$

این جمله کار را خراب می‌کند

پس اگر Λ تابع مکان نباشد ϕ و $\partial_\mu\phi$ عین هم تغییر می‌یابند ولی اگر وابسته به مکان باشد

$$\delta\mathcal{L} = i(\partial_\mu\Lambda)(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) = (\partial_\mu\Lambda)J^\mu \neq 0$$

- برای حفظ ناوردایی $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ ، باید اندرکنش اضافی وارد $\mathcal{L}$ کنیم

تحت تبدیلات local $U(1)$

minimal (جایگذاری ← راه حل

(ساده‌ترین کاری که می‌شود کرد)

$$\partial_\mu \phi \longrightarrow D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$$

&

$$\partial_\mu \phi^* \longrightarrow D_\mu \phi^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*$$

$$\left.\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - i\Lambda\phi \\ \phi^* &\longrightarrow \phi^{*\prime} = \phi^* + i\Lambda\phi^* \end{aligned}\right\} ①$$

و همزمان $A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda$ ②

ادعا: تحت ①، ②

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi D^\mu \phi^* - m^2 \phi\phi^* \longrightarrow \mathcal{L}$$

حال تغییرات $D_\mu\phi$ را بررسی می‌کنیم

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi \xrightarrow{G.T} \partial_\mu(\phi - i\Lambda\phi) + ie\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\right)\cdot(\phi - i\Lambda\phi)$$

$$= (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi - i\Lambda(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi = D_\mu\phi - i\Lambda D_\mu\phi$$

یعنی $\delta(D_\mu\phi) = -i\Lambda D_\mu\phi \Longrightarrow$ تغییرات $D_\mu\phi$ مثل تغییرات ϕ شد

- به A_μ که به خاطر حفظ ناوردایی پیمانه‌ای وارد کردیم، میدان پیمانه‌ای گوئیم.

- پس اعمال ناوردایی پیمانه‌ای (موضعی)، برهمکنش تولید می‌کند (در لاگرانژی جملات اضافی وارد می‌کند)

- هنوز جمله‌ای از جنبش A ها را نداریم در $\mathcal{L}$

حال $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ، $F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu\left(A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\nu\Lambda\right) - \partial_\nu\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda\right)$

⇐ ۱- $F_{\mu\nu}$ gauge invarant است ، ۲- lorantz invariant هم است

پس $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ تحت تبدیلات ① و ② ناورداست.

Kinetic term

$$\Longrightarrow \mathcal{L} = D_\mu\phi D^\mu\phi^* - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

(17)

$(\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*)$

حال $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ie\phi D^\mu\phi^* - ie\phi^* D^\mu\phi = -ei(\phi^* D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*) = -eJ^\mu$

شبیه J^μ است

$D_\mu^\phi \longrightarrow$ Covariant derivative

$, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$

به عهده خودمان

پس $\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu} = eJ^\mu}$

معادله ماکسول در حضور جریان خارجی

$\boxed{\text{در خلاء}: \ \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0}$

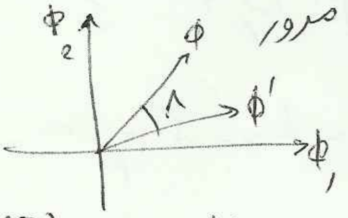
~~خود به معادلات ماکسول~~ ـ با اعمال ناوردایی پیمانه‌ای موضعی، توانستیم به معادلات ماکسول برسیم. پس Aها همان فوتون‌ها هستند که با ذرات کلاین گوردون برهمکنش می‌کنند.

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$U(1)$ یا SO_2 دوران در فضای دو بعدی است

(یا در صفحه ϕ_1 و ϕ_2 خودش) $\longleftarrow$ حال می‌خواهیم تعمیم دهیم (برای میدان سه مولفه‌ای نظریه پیمانه‌ای local را بررسی می‌کنیم)

(*) $\vec{\Lambda}$ را می‌خواهیم سه مولفه‌ای کنیم (بردار)



حول بعد عمودی (3) دوران داریم

مرور

$\phi_1' = \phi_1\cos\Lambda_3 + \phi_2\sin\Lambda_3 \simeq \phi_1 + \Lambda_3\phi_2$

$\phi_2' = -\phi_1\sin\Lambda_3 + \phi_2\cos\Lambda_3 \simeq \phi_2 - \Lambda_3\phi_1$

حال تعمیم $\downarrow$

ادعا می‌کنیم تبدیلات بالا از روابط زیر بدست می‌آیند:

$\vec{\phi} \longrightarrow \vec{\phi}' = \vec{\phi} - \vec{\Lambda}\times\vec{\phi}$ $\quad$ که $\boxed{\vec{\Lambda} = -\hat{k}\Lambda_3}$ حالت خاص

مولفه اول

چون $\phi_1 \longrightarrow \phi_1' = \phi_1 - (\vec{\Lambda}\times\phi)_1 = \phi_1 + \Lambda_3\phi_2$

$\boxed{\vec{\Lambda}\times\vec{\phi} = -\hat{k}\Lambda_3 \times (\hat{i}\phi_1 + \hat{j}\phi_2)}$

$\phi_2 \longrightarrow \phi_2' = \phi_2 - (\Lambda\times\phi)_2 = \phi_2 - \Lambda_3\phi_1$

(*) تبدیلی را انتخاب کنیم که تعداد پارامتر تبدیل سه تا است.

$$\begin{cases} \vec{\Phi} = \hat{i}\phi_1 + \hat{j}\phi_2 + \hat{k}\phi_3 \\ \vec{\Lambda} = \text{دلخواه} \\ \vec{\Phi} \to \vec{\Phi}' = \vec{\Phi} - \vec{\Lambda} \times \vec{\Phi} \\ \delta\vec{\Phi} = -\vec{\Lambda} \times \vec{\Phi} \end{cases}$$

- پیش گروه تبدیلات $O(3)$ یا $SU(2)$ را در نظر می‌گیریم
- چون تبدیلات بی‌نهایت کوچک را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \vec{\Phi}\, \partial^\mu \vec{\Phi} - m^2 \vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi}$$

- تا موقعی که $\vec{\Lambda} = cte$ است $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$

(global)

حال $\vec{\Lambda} \to \vec{\Lambda}(x)$ ، $\delta(\partial_\mu \vec{\Phi}) = -\vec{\Lambda} \times \partial_\mu \vec{\Phi} - (\partial_\mu \vec{\Lambda}) \times \vec{\Phi}$

$$\partial_\mu \vec{\Phi} \longrightarrow D_\mu \vec{\Phi} = \partial_\mu \vec{\Phi} + g\, \vec{W}_\mu \times \vec{\Phi}$$

ضرب برداری ، $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$

Coupling constant فقط یک وحدت دارد $\Longrightarrow$ وحدت نیروها

۳ تا gauge-Field داریم

حدس می‌زنیم : $\vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu' = \vec{W}_\mu - \underbrace{\vec{\Lambda} \times \vec{W}_\mu}_{\text{جملهٔ لازم است}} + \frac{1}{g}\partial_\mu \vec{\Lambda}$

از دو جا حدس می‌زنیم ۱- به خاطر Vector بودن W_μ (فضا و میدانها)

۲- به خاطر gauge بودن

تمرین : $D\vec{\Phi} \longrightarrow D_\mu \vec{\Phi} - \vec{\Lambda} \times D_\mu \vec{\Phi}$

حال تعمیم $F_{\mu\nu}$ را فراهم می‌نویسیم: (قبلاً $F_{\mu\nu}$ تحت gauge_transf. ناوردا بوده)

اگر بنویسیم $\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu$ (*) باید $\delta(\vec{W}_{\mu\nu}) = -\vec{\Lambda} \times \vec{W}_{\mu\nu}$

$W_{\mu\nu}$ باید این الزام را برآورده کند (چون نمایند مانند بردارها تبدیل شود) ولی اگر به فرم (*) بنویسیم نمی‌کند پس

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g\, \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \longrightarrow$$

نکته: $\vec{W}_{\mu\nu}$ در این مورد دیگر gauge-invariant نیست، (برخلاف $F_{\mu\nu}$)

یعنی از Abelian gauge Theory به Non Abelian gauge Theory منتقل است

(غیر $U(1)$)

پس $\mathcal{L}_{\text{gauge field term}} = -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu} \xrightarrow[\text{تغییر نمی‌دهد تحت}]{G.T} \mathcal{L}_{G.F.T}$

پس $\mathcal{L} = (D_\mu\vec{\Phi})\cdot(D^\mu\vec{\Phi}) - m^2\vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi} - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}$

تحت $SU(2)$ یا $SO(3)$ ناورداست

نکته: جمله $m^2 A_\mu A^\mu$ را وارد نکردیم چون ناوردایی را به هم می‌زند.

پس تا موقعی که ناوردایی پیمانه‌ای داریم A ها (میدانهای پیمانه‌ای) باید بدون جرم باشند - اگر جملات جرم دار میدانها را اضافه کنیم ناوردایی پیمانه‌ای به هم می‌خورد ($\mathcal{L}$ مشکلی ندارد) - با اضافه کردن این جملات مشکل در سطوح بالاتر پیدا می‌شود ← تئوری بازبهنجارش پذیر نخواهد بود.

پس با یک سری بی‌نهایت‌های غیرقابل حل مواجه خواهیم شد. ولی روشهایی وجود دارد که بدون شکستن تقارن پیمانه‌ای جملات جرم دار را وارد لاگرانژی کنیم (با اضافه کردن میدانهای جدید در لاگرانژی (مثلا Higgs particle) ولی تاکنون Higgs boson دیده نشده!!!

مرور بر آنچه گذشت

$\vec{\Phi} = (\phi_1 , \phi_2 , \phi_3)$

دوران حول $|\vec{\Lambda}|$ به اندازهٔ $\hat{\Lambda} = \dfrac{\vec{\Lambda}}{|\vec{\Lambda}|}$

$\vec{\Phi} \longrightarrow \vec{\Phi}' = \vec{\Phi} - \vec{\Lambda} \times \vec{\Phi}$,

$\delta \vec{\Phi} = - \vec{\Lambda} \times \vec{\Phi}$,

$\partial_\mu \vec{\Phi} \longrightarrow D_\mu \vec{\Phi} = \partial_\mu \vec{\Phi} + g \vec{W}_\mu \times \vec{\Phi}$

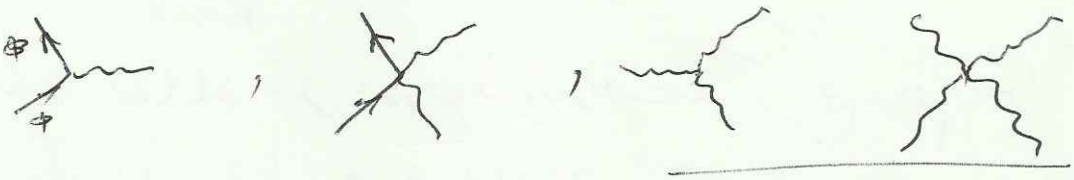
و همزمان $W_\mu \to W'_\mu = \dots$

$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu$, طوری که $\delta(\vec{W}_{\mu\nu}) = - \vec{\Lambda} \times \vec{W}_{\mu\nu}$

چون $\vec{W}$ در فضای میدانها، بردار است.

$L =$ صفحه قبل

جملات برهم‌کنش لاگرانژی: $\Phi\Phi W$, $WW\Phi\Phi$ و WWW و $WWWW$



فقط در مورد گروه‌های NonAbeli این جمله‌ها ظاهر می‌شوند.

- برای اینکه بخواهیم جریان این تئوری را بدست آوریم باید Λ را ثابت مسئله را حل کنیم مثل $U(1)$ (global) ← سه تا مؤلفه خواهد داشت $\vec{J}_\mu$ ← بنابراین بار خواهیم داشت

برای هر ذره ← $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$ ← بنابراین جمله برخلاف الکترومغناطیس جملات سه‌تایی و چهارم

نیز ظاهر می‌شوند چون (conserved charge سه مؤلفه‌ای وجود دارد)

- هر گروه لی (گروهی که پارامترهایش بطور پیوسته تغییر می‌کنند، دوران گروه لی است) را می‌شود بصورت زیر نشان داد.

$S(\theta_1 , \dots , \theta_n) = e^{i M_a \theta_a}$ که $a = 1 , \dots , n$

مولد گروه

مولدها

$[M_a , M_b] = C_{abc} M_c$: جبر گروه

structure constant