Subject: 9
Year. Month. Date. ( )

جلسه سوم ۹۱/۷/۱۱

$\nabla\cdot E = 4\pi\rho$

$\nabla\times E = 0 \rightarrow E = -\nabla\phi$

$\nabla\cdot(-\nabla\phi) = 4\pi\rho \qquad \nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ معادله پواسون

در جاییکه بار نباشد معادله به لاپلاس تبدیل می شود $\nabla^2\varphi = 0$

می خواهیم پتانسیل حاصل از توزیع باری را بدست آوریم که شرایط مرزی برای آن مطرح شده است لذا به سراغ معادله پواسون می رویم

شرط مرزی: $\varphi\big|_{x\in S} = 0$ (پتانسیل در سطح صفر است)

الگوریتم حل: جوابی را پیشنهاد می دهیم $\varphi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')\, \underbrace{G(\vec{x},\vec{x}')}_{\text{تابع گرین}}\, d^3x'$

اگر جواب پیشنهادی ما درست باشد در معادله پواسون صدق می کند یعنی اگر از φ پیشنهادی ∇^2 بگیریم $-4\pi\rho$ می شود.

$\nabla^2\phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')\, \nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}')\, d^3x' = -4\pi\rho(\vec{x})$

داشتیم $\int f(x')\,\delta(x-x')\,d^3x' = f(x)$ پس،

$\nabla^2 G(x,x') = -4\pi\delta(x-x')$

$G(x,x')\big|_{x\in S} = 0$

در حالت کلی این جواب مسئله ما نیست.

برای جواب کلی باید از یک قضیه ای استفاده کنیم

$\int_V (\varphi(x)\nabla^2\psi(x) - \psi(x)\nabla^2\varphi(x))\, d^3x = \oint_S (\phi(x)\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n})\, ds$

$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dv = \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds$ قضیه دیورژانس

قضیه گرین که در بالا آمده است همان قضیه دیورژانس است ولی برای یک F خاص:

$\vec{F} = \varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi$

P4PCO

Subject: 10
Year. Month. Date. ( )

چنانچه در قضیه گرین φ (پتانسیل الکتریکی) و ψ تابع گرین G باشند

$$\int_V \left(\varphi(x')\nabla'^2 G(x,x') - G(x,x')\nabla'^2\varphi(x')\right) d^3x' = \oint_S \left(\varphi(x')\frac{\partial G(x')}{\partial n'} - G(x')\frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'}\right) ds'$$

$$-4\pi\varphi(x) + 4\pi\int_V \rho(x')\, G(x,x')\, d^3x' = \oint \left(\varphi(x')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'} - G(x,x')\frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'}\right)$$

$$\varphi(x) = \int_V \rho(x')\, G(x,x')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\varphi(x')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'} - G(x,x')\frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'}\right) ds'$$

φ و G انتگرال ده هستند لذا اگر در سطح صفر باشند انتگرال روی سطح صفر است.

حالت اول: شرط مرزی دیریکله:

$$\varphi(x) = \int_V \rho(x')\, G_D(x,x')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint \varphi(x')\frac{\partial G_D(x,x')}{\partial n'}\, ds'$$

حالت دوم: شرط مرزی نویمن (مثلاً: ثابت تا ه)

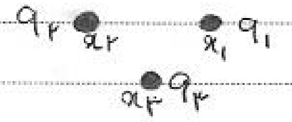
$$\left.\frac{\partial G_N(x,x')}{\partial n'}\right|_{x'\in S} = \frac{-4\pi}{S} \rightarrow$$ مساحت سطحی که انتگرال می‌گیریم

$$\varphi(x) = \int_V \rho(x')\, G(x,x')\, d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S G_N(x,x')\frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'}\, ds' + \frac{1}{S}\oint_S \varphi(x')\, ds'$$

انرژی الکتروستاتیک: طبق قانون پایستگی انرژی، انرژی به صورت‌های دیگری تبدیل می‌شود اما کل آن تغییری نمی‌کند چیزی نه تولید می‌شود نه نابود می‌شود
بطور مثال انرژی ذخیره شده در این ساختمان = انرژی است که صرف ساخت ساختمان شده اند
انرژی بدن آن کارگر که در ساخت حساب نشده نه آن بخشی که به گرما تبدیل شده.
انرژی دستگاه بار: مقدار انرژی ای است که صرف شده تا این بارها را بیاوریم و در نقاط مشخصی قرار دهیم. ما کار کرده ایم چراکه نیرو وارد شده و جابه جایی صورت گرفته است.

Subject: 11
Year. Month. Date. ( )

برای محاسبه انرژی الکترواستاتیک جای بار q_1 را خالی می‌کنیم و آن را از ∞ می‌آوریم اگر در این انتقال نیرویی به ما وارد شود خود هم نیرویی در مقابل آن وارد نکرده‌ام پس کاری انجام نمی‌شود.
پس وقتی هیچ باری نداریم و تک بار اولیه را می‌آوریم هیچ کاری نکرده‌ایم چون بر نیرو غلبه نکرده‌ایم
بار q_2 را از ∞ می‌آوریم در محل x_2 قرار می‌دهیم و بار q_1 میدان ایجاد کرده و تا ∞ ادامه دارد
پس باید برای آوردن q_2 نیرویی برابر و خلاف جهت وارد کنیم تا با سرعت ثابت حرکت کرده باشیم



$F_{\text{از ۱ به ۲ وارد می‌شود}} = E_1(x_2)\, q_2$, $F_{\text{من به ۲ وارد می‌کنم}} = -E_1(x_2)\, q_2$

$$w_2 = \int_\infty^{x_2} F\cdot dx = \int_\infty^{x_2} -q_2 E_1(x)\, dx = (q_2)\underbrace{\left(-\int_\infty^{x_2} E_1(x)\, dx\right)}_{\text{پتانسیل بار ۱ در محل } x_2 \ \ \varphi_1(x_2)} = q_2\varphi_1(\vec{x}_2)$$

$E = -\nabla\varphi$

$w_1 + w_2 = \text{انرژی الکترواستاتیکی ۲ بار} = q_2\varphi_1(x_2) = q_1\varphi_2(x_1)$

تحت تعریف انرژی فرق نمی‌کند و به خودش تبدیل می‌شود

$$w_3 = q_3\left(\varphi_1(x_3) + \varphi_2(x_3)\right) = q_3\varphi_1(x_3) + q_3\varphi_2(x_3) = q_1\varphi_3(x_1) + q_2\varphi_3(x_2)$$

$$u = w_1 + w_2 + w_3 = 0 + q_2\varphi_1(x_2) + q_1\varphi_3(x_1) + q_3\varphi_2(x_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} q_i\varphi_j(x_i)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[q_1\varphi_2(x_1) + q_1\varphi_3(x_1) + q_2\varphi_1(x_2) + q_2\varphi_3(x_2) +$$

$$q_3\varphi_1(x_3) + q_3\varphi_2(x_3)\Big]$$

$$u = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} q_i\varphi_j(x_i)$$ بار i ام در پتانسیل j ام در محل بار i ام پتانسیل بقیه بارها در محل بار i

$$u = \frac{1}{2}\sum q_i\Phi(x_i) - \underbrace{\frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i(x_i)}_{\text{خود انرژی } w_0}$$

$$u = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi(x_i) + w_0 \qquad u = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi(x_i)$$

P4PCO

چنانچه توزیع بار پیوسته باشد

$$u=\frac{1}{2}\int \rho(x)\,\varphi(x)\,d^3x$$

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho(x) \qquad \rho=\frac{-1}{4\pi}\nabla^2\varphi(x)$$

$$u=\frac{-1}{8\pi}\int_V \varphi(x)\,\nabla^2\varphi(x)\,d^3x$$

$$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)=\varphi\nabla^2\varphi+\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi$$

$$u=\frac{-1}{8\pi}\int_V \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)\,d^3x+\frac{1}{8\pi}\int_V |\nabla\varphi|^2\,d^3x$$

$$=\frac{-1}{8\pi}\underbrace{\oint \varphi\nabla\varphi\cdot\hat{n}\,ds}_{\text{در بی‌نهایت صفر}}+\frac{1}{8\pi}\int_V |E|^2\,d^3x$$

$$u=\frac{1}{8\pi}\int |E|^2\,d^3x \qquad u=\frac{1}{8\pi}|E|^2$$ چگالی حجمی انرژی الکترواستاتیکی

جلسه چهارم ۱۳، ۷، ۹۱

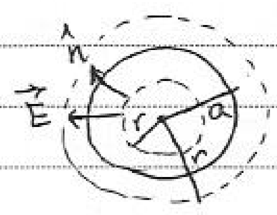
انرژی الکترواستاتیک کره‌ای با توزیع یکنواخت بار حجمی Q

انرژی در جایی که میدان وجود دارد ذخیره می‌شود مثلاً در خازن بین دو صفحه میدان وجود دارد و انرژی الکترواستاتیک در این میدان ذخیره می‌شود.

$$u=\frac{1}{8\pi}\int_V |E|^2 d^3x=\int_V u\,d^3x \;;\; u=\frac{1}{8\pi}|E|^2$$

میدان هم در داخل کره هم در خارج کره غیرصفر است اما با هم متفاوتند
میدان داخل کره را چون بار یکنواخت پخش شده و تقارن هندسی داریم با گاوس بدست می‌آوریم:

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds=4\pi q_{in} \qquad \rho=\frac{\text{بار}}{\text{حجم}}$$



$$\int E\,ds=4\pi\rho\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi Q\frac{r^3}{a^3}$$

$$E\,4\pi r^2=4\pi Q\frac{r^3}{a^3}\longrightarrow E_{in}=\frac{Qr}{a^3} \qquad r<a$$ میدان داخل

$E(4\pi r^2) = 4\pi Q$ $\quad E_{out} = \frac{Q}{r^2}$ $\quad r>a$ میدان خارج

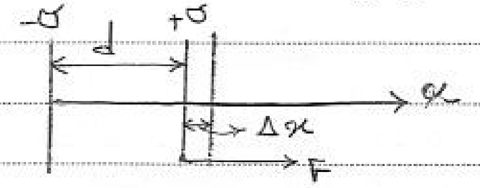
$$u = \frac{1}{8\pi}\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{Q^2 r^2}{a^6}\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi + \frac{1}{8\pi}\int_a^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{Q^2}{r^4}\, r^2 \sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{a^6}\frac{a^5}{5} + \frac{Q^2}{2}\left(-\frac{1}{r}\Big|_a^\infty\right) = \frac{Q^2}{10a}+\frac{Q^2}{2a} = \frac{6Q^2}{10a} = \frac{3Q^2}{5a}$$

نیروی وارد بر توزیع بار از طریق انرژی الکتروستاتیک

دو صفحه خازن داریم با چگالی $+\sigma$ و $-\sigma$. برای محاسبه نیرویی که صفحه $+\sigma$ و $-\sigma$ وارد می کند، صفحه $+\sigma$ را به اندازه Δx به عقب بکشیم یعنی فاصله بین صفحات را از d به $d+\Delta x$ افزایش دهیم. در حال صرف روبرو هستیم که صرف جابجایی می شود بین کار کرده ام. ضمناً با افزایش فاصله صفحات حجم فضای بین صفحات زیاد شده لذا به ازای حجمی که ایجاد شده انرژی در آن ذخیره می شود. کار نیروی من با یک منفی کار نیروی صفحه مقابل است چون با سرعت ثابت صفحه را عقب کشیده ایم. پس نظر به خلاصه تا تغییر انرژی دستگاه نیرویی که هر صفحه به دیگری وارد می کند بدست می آید.

1. انرژی دستگاه در حالتی که فاصله صفحات d است را بدست می آوریم.
2. انرژی دستگاه در حالتی که فاصله صفحات $d+\Delta x$ است را بدست می آوریم.
3. دو انرژی بدست آمده را از هم کم می کنیم کار نیروی دست من بدست می آید.
4. از روی کار من نیروی من درست می آید.
5. با یک منفی نیرویی که به صفحه مقابل وارد می شود بدست می آید.



$$u = \frac{1}{8\pi}\int_V |\vec E|^2 d^3x$$

تنها جایی که میدان غیر صفر است بین دو صفحه است.

$u_1 = \frac{1}{8\pi}\int_0^d 16\pi^2\sigma^2\, d^3x = 2\pi\sigma^2 A d$ انرژی در فاصله d ؛ $\left(E=\frac{\sigma}{\varepsilon}\right.$ در SI $\rightarrow E = 4\pi\sigma$ در گاوسی$\left.\right)$

$u_2 = \frac{1}{8\pi}\int 16\pi^2\sigma^2\, d^3x = 2\pi\sigma^2 A(d+\Delta x)$ انرژی در فاصله $d+\Delta x$

$W = \Delta u = u_2 - u_1 = 2\pi\sigma^2 A\,\Delta x$ کار نیروی دست من

$F\Delta x = 2\pi\sigma^2 A\,\Delta x \longrightarrow \vec F = 2\pi\sigma^2 A\,\hat i$

هم جهت

$F = -2\pi\sigma^2 A\,\hat i$ نیرویی که صفحه $-\sigma$ به $+\sigma$ وارد می کند

روش ۲: میدان $\sigma-$ در محل $\sigma+$ را پیدا می‌کنیم و با رابطه $F=qE$ نیروی وارده بر $\sigma+$ را بدست می‌آوریم

$$\vec{F} = \sigma A(-2\pi\sigma) = -2\pi\sigma^2 A\hat{i}$$

* در حالت کلی $E = \frac{E_1+E_2}{2} = 2\pi\sigma \;:\; 4\pi\sigma \,|\, 0$

ضریب تناسب ظرفیت:

Q , a

هر وقت رسانا داریم بار توزیع حجمی ندارد قطعاً توزیع سطحی است. چون بار در سطح قرار می‌گیرد

$$\varphi = \frac{Q}{a} \rightarrow \varphi \propto Q \rightarrow \varphi = AQ$$

فرض کنیم شرط مرزی دیریکله برقرار است: ضریب تناسب (به مشخصات هندسی بستگی دارد)

$$\varphi(x) = \int \rho(x')\, G(x,x')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}\, \underbrace{\varphi(x')}_{\text{برای هر رسانا حساب می‌کنیم}}\, ds'$$

در مسائلی که مجموعه‌ای رسانا داریم

این جمله صفر است چون در رسانا بار حجمی ندارد

مختصه عمود بر سطح رسانا

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} \frac{\partial G_D(x,x')}{\partial n'_i}\, \varphi_i(x')\, ds'_i$$

پتانسیل در هر نقطه از فضا در اطراف این رسانا‌ها از رابطه بالا بدست می‌آید

میدان همیشه بر سطوح هم پتانسیل (رسانا‌ها) عمود است. یعنی در حالت الکتروستاتیک به رسانا بار دهیم در سطح خارجی توزیع می‌شود، در جاهای نوک تیز بیشتر جاهای دیگر کمتر. هرچه صبر کنیم حرکتی نداریم پس هیچ اختلاف پتانسیلی در هیچ دو نقطه‌ای وجود ندارد.

برای بدست آوردن میدان سطح رسانای j ام باید از پتانسیل نسبت به مولفه عمود بر سطح رسانای j ام مشتق بگیریم با یک علامت منفی.

$$4\pi\sigma_j = E_j = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n_j} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} \frac{\partial^2 G_D(x,x')}{\partial n_j\, \partial n'_i}\, \varphi_i(x')\, ds'_i$$

$$\sigma_j = \frac{1}{16\pi^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} \frac{\partial^2 G_D(x,x')}{\partial n_j\, \partial n'_i}\, \varphi_i(x')\, ds'_i$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{16\pi^2}\left[\int ds_j\left[\int_{S_i}\frac{\partial^2 G_D(x,x')}{\partial n_j\,\partial n'_i}\, ds'_i\right]\varphi_i(x')\right]$$

$Q_j = \sum_{i=1}^{N} C_{ji}\,\varphi_i$ $\qquad \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = C_{ij} = C_{ji}$

قضیه توابع گرین:

دو توزیع بار سطحی و حجمی داریم ρ و σ پتانسیلی که ایجاد می‌کند φ

″ ″ ″ ρ' و σ' ″ φ'

$$\int_V \varphi\rho' d^3x + \int_S \varphi\sigma' ds = \int_V \varphi'\rho\, d^3x + \int_S \varphi'\sigma\, ds$$

در قضیه گرین بگذاریم ثابت می‌شود $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ ، $\psi \to \varphi$

$\nabla^2\varphi' = -4\pi\rho'$ ، $\phi \to \varphi'$

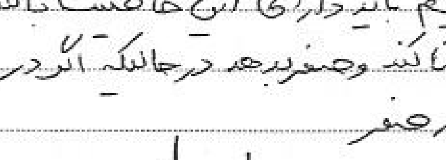
جلسه پنجم ۹۱/۷/۱۹

فصل دوم

کار ما در این فصل بدست آوردن پتانسیل در نقاط مختلف فضا با داشتن شرایط مرزی است به عبارت دیگر حل معادله پواسون و لاپلاس

گاهی اوقات هم اصلاً توزیع بار نداریم و فقط شرایط مرزی داده می‌شود که در قبل به شرط مرزی نویمن و دیریکله (و گاهی ترکیبی از این دو) اشاره شد.

بار نقطه‌ای q را داریم که صفحه رسانایی جلوی این بار است با پتانسیل صفر (به زمین وصل شده).
پتانسیل بار نقطه‌ای $\frac{kq}{r}$ بود اما آیا با حضور صفحه رسانایی با پتانسیل صفر در جلوی این بار باز هم پتانسیل $\frac{kq}{r}$ است؟! نه! چون عبارتی که برای پتانسیل می‌نویسیم باید دارای این خاصیت باشد که وقتی فاصله تا صفحه رسانا را در آن قرار می‌دهیم شرط مرزی را ارضا کند و صفر بدهد در حالیکه اگر در جای r، d قرار دهیم (فاصله بار تا صفحه) $\frac{kq}{d}$ می‌دهد و نه صفر



لذا نیاز به روشی داریم که به ما در حل اینگونه مسائل (مسائل شرط مرزی) کمک کند
یکی از روشهای کارآمد در این مسائل روش بار تصویر است.

روش بار تصویر:

در این روش شرط مرزی را برمی‌داریم و اثرش را با توزیع بار جایگزین می‌کنیم

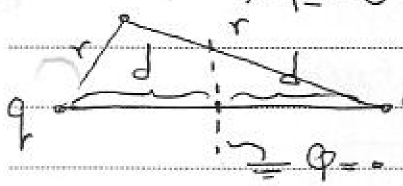
حال سوالی که اینجا مطرح می‌شود چگونه می‌توان به میزان و مکان درست برای توزیع بار جایگزین شرط مرزی دست یافت؟ باید پتانسیل ناشی از توزیع بار جایگزین و بار اولیه در محل شرط مرزی ما شرط را ارضا کنند. یعنی پتانسیل بار اولیه به علاوه پتانسیل بار جایگزین در محل صفحه رسانا صفر شود.

بار و صفحه رسانا:

q خطوط میدانی دارد، صفحه مثل آینه عمل می‌کند و خطوط میدان q را برمی‌گرداند پس سهم میدان صفحه خطوطی است که از آینه برگشته.

درست مثل این که منبع نوری را پشت آینه بگذاریم و خطوط ناشی از آن معادل همان خطوط بازتابی از آینه باشد.

پس فرض می‌کنیم محل q' تصویر آینه‌ای q باشد اما باز هنوز مقدار q را نمی‌دانیم.



از روی خطوط میدان با فرض آینه‌ای بودن صفحه رسانا به محل q' رسیدیم

از روی برقرار بودن شرط مرزی مسئله مقدار q' رسیدیم.

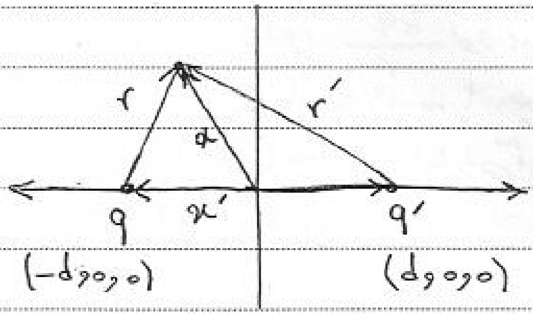
$$\varphi(r)=\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}$$ پتانسیل بار اولیه + پتانسیل بار جایگزین

شرط مرزی مسئله یعنی صفحه باید پتانسیل صفر را ارضا کند لذا

$$\varphi\Big|_{\text{روی صفحه}}=\frac{q}{r}+\frac{q'}{r}=0 \longrightarrow q+q'=0 \longrightarrow q=-q'$$

$$\varphi(r)=\frac{q}{r}-\frac{q}{r'}$$ پتانسیل در هر نقطه از رابطه روبه‌رو بدست می‌آید

در قبل داشتیم:
$$G(x,x')=\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}=\frac{1}{|x-x'|}-\frac{1}{|x+x'|}$$



$$G=\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}$$

مشتق φ صفر باشد:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

∂n → مولفه عمود بر صفحه

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{\text{روی صفحه}}=q\left(\frac{-1}{2}\right)2(x+d)\left((x+d)^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+q'\left(\frac{-1}{2}\right)2(x-d)\left((x-d)^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\Bigg|_{x=}$$

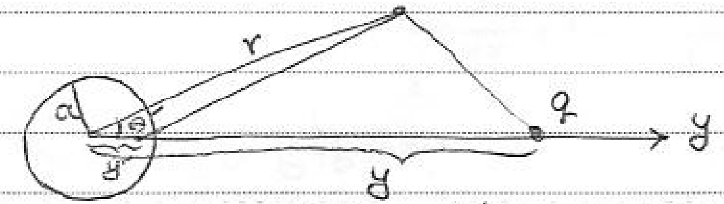
روش تصویر جایی که بار اصلی است پتانسیل در هر سمت پشت صفحه را صفر بشود پیدا کرد.

تابع گرین از هندسه شکل بدست می آید یعنی به شرایط مرزی بستگی دارد.

بار نقطه‌ای در مقابل کره رسانا

این مسئله را در ۳ حالت بررسی می کنیم ۱- کره به زمین وصل شده ۲- کره پتانسیل ثابتی دارد ۳- بار کره ثابته. برای داخل کره نمی توان پتانسیل را تعیین کرد چون میدان صفر و پتانسیل ثابت است.

حالت اول: کره با پتانسیل صفر



حالا باید کره یعنی شرط مرزی را برداریم به جای آن بار تصویر بگذاریم کره آینه محدب محسوب می شود پس کره را بر می داریم و جای آن q' که تصویر مجازی q است قرار می دهیم

$$\varphi(r) = \frac{q}{\sqrt{r^2+y^2-2ry\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+y'^2-2ry'\cos\theta}}$$

$$\varphi\Big|_{\text{روی سطح } r=a} = \frac{q}{\underbrace{\sqrt{a^2+y^2-2ay\cos\theta}}_{A}} + \frac{q'}{\underbrace{\sqrt{a^2+y'^2-2ay'\cos\theta}}_{\alpha A}} = 0$$

$$a^2+y'^2-2ay'\cos\theta = \alpha(a^2+y^2-2ay\cos\theta)$$

$$\frac{q}{\sqrt{A}} + \frac{q'}{\sqrt{\alpha A}} = 0 \longrightarrow \frac{q+\frac{q'}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{A}} = 0 \longrightarrow q + \frac{q'}{\sqrt{\alpha}} = 0$$

$$q = -\frac{q'}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow q' = -q\sqrt{\alpha}$$

$$a^2+y'^2-2ay'\cos\theta = \alpha(a^2+y^2)-2ay\alpha\cos\theta$$

جملاتی که جنس یکسان دارند باید ضرایب یکسان داشته باشند

$$-2ay' = -2ay\alpha \rightarrow y' = \alpha y$$

$$a^2+y'^2 = \alpha(a^2+y^2) \longrightarrow a^2+\alpha^2y^2 = \alpha(a^2+y^2)$$

Subject: 18
Year. Month. Date. ( )

$$y^2\alpha^2-(a^2+y^2)\alpha+a^2=0 \rightarrow \Delta=(a^2+y^2)^2-4y^2a^2=a^4+y^4+2a^2y^2-4y^2a^2=$$

$$=a^4+y^4-2a^2y^2=(a^2-y^2)^2$$

$$\alpha=\frac{(a^2+y^2)\pm\sqrt{(a^2-y^2)^2}}{2y^2}=\frac{a^2+y^2\pm|\overbrace{(a^2-y^2)}^{a<y}|}{2y^2}=\frac{a^2+y^2\pm(y^2-a^2)}{2y^2}=$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2+y^2+y^2-a^2}{2y^2}=\dfrac{2y^2}{2y^2}=1\longrightarrow\alpha=1\\[2ex]\dfrac{a^2+y^2-y^2+a^2}{2y^2}=\dfrac{2a^2}{2y^2}=\dfrac{a^2}{y^2}\longrightarrow\alpha=\dfrac{a^2}{y^2}\end{cases}$$

$y'=\alpha y$ اگر $\alpha=1$ یعنی $y'=y$ که اینطور نیست پس $\alpha=1$ غ ق ق

$\alpha=\frac{a^2}{y^2}$ $\quad y'=\alpha y=\frac{a^2}{y^2}y=\frac{a^2}{y}$ محل بار q'

$q'=-q\sqrt{\alpha}=-q\sqrt{\frac{a^2}{y^2}}=-\frac{a}{y}q$ مقدار بار q'

$$\varphi(r)=\frac{q}{\sqrt{r^2+y^2-2ry\cos\theta}}+\frac{-\frac{a}{y}q}{\sqrt{r^2+\frac{a^4}{y^2}-2r\frac{a^2}{y}\cos\theta}}$$

حالت دوم) کره دارای پتانسیل ثابت V می باشد.

بار نقطه ای در مرکز پتانسیل $\frac{q}{\text{شعاع کره}}$ را در سطح ایجاد می کند پس ما بار q'' را در مرکز داریم که پتانسیل $V=\frac{q''}{a}$

$\varphi(r)=\;〃\;+\;〃\;+\frac{q''}{r}$, $\quad q''=Va$ را در سطح ایجاد می کند

$\varphi(a)=0+0+\frac{Va}{a}$ وقتی روی سطح هستیم

حالت سوم: کره دارای بار ثابت باشد.

کره با بار Q باشد بار q و q' را بر سطح القا شود پس باید به اندازه $Q-q$ در مرکز قرار دهیم که معادل آن در سطح القا شود که مجموع q' القا شده از حضور q و $Q-q'$ القا شده بواسطه از حضور این بار در مرکز بار کل کره $q'+Q-q'$ یعنی مقدار ثابت Q باشد.

PAPCO

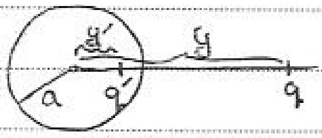
Subject: 19
Year. Month. Date. ( )

$Q(r) = {}'' + {}'' + \frac{q^2}{} \to (Q-q')$

$Q(a) = 0 + 0 + \frac{{}^2Q - q'}{a}$ وقتی روی سطح هستیم

* برای اینکه اطمینان بیشتر به رابطه ای که بدست آوردیم می خواهیم از رابطه L برو کره که داریم به رابطه بار و صفحه ای که در تصاویر داشتیم برسیم

فاصله تا سطح کره نسبت به شعاع کوچک باشد کره را تخت می بینیم



$y-a \ll a \to$ نتایج بار و صفحه بدست می آید

✓ فاصله q تا آینه $y-a$ و فاصله q' تا آینه $a-y'$ $\quad y-a=a-y'$

✓ در آینه تخت فاصله جسم تا آینه با فاصله تصویر تا آینه برابر است لذا: $\quad y+y'=2a$

$$y' = \frac{a^2}{y} = \frac{a^2}{a(1+\frac{y-a}{a})} = a\Big(1+\underbrace{\frac{y-a}{a}}_{\text{به سمت صفر می رود}}\Big)^{-1} = a\Big(1-\frac{y-a}{a}\Big) = a-(y-a) =$$

$$= a-y+a = 2a-y$$

نکته: $(1+\epsilon)^n = 1+n\epsilon$

$y'+y=2a$ ✓ رابطه L بار و صفحه تخت در آمد ✓

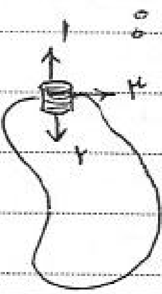
$q' = -\frac{a}{y}q \xrightarrow{a=y}$ $\quad q'=-q$ رابطه بار و صفحه تخت

جلسه ششم ۹۱/۷/۲۰

تا به حال پتانسیل را برای کره رسانا در سه حالت ($Q=Const$ بار ثابت، $\varphi=Const$ پتانسیل ثابت، $\varphi=0$ پتانسیل صفر) در مقابل بار نقطه ای q بدست آوردیم. حال می خواهیم چگالی بار سطحی که روی سطح کره ایجاد می شود را در این سه حالت بدست آوریم:

چگالی سطحی بار ایجاد شده روی سطح کره

حالت اول:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi q_{in}$$

$$\int_1 E_n\, ds + \int_2 \underset{0}{\vec{E}\cdot d\vec{s}} + \int_3 \underset{0}{\vec{E}\cdot d\vec{s}} = 4\pi \int \sigma\, ds$$

با میل دادن سطح جانبی به سمت صفر — میدان داخل رسانا صفر است

P4PCO

Subject: 20
Year. Month. Date. ( )

$E_n = 4\pi\sigma$ میدان عمودی در نزدیکی سطح رسانا

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n \Big| = \frac{1}{4\pi} E_r = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=a} =$$

مولفه عمود در سطح کره پس در راستای شعاع است

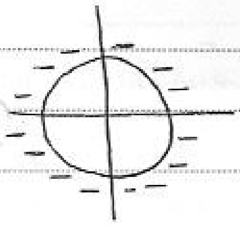
$$= \frac{-1}{4\pi}\left\{ q\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{2r-2y\cos\theta}{(r^2+y^2-2ry\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{y}q\left(\frac{-1}{2}\right)\left(2r-\frac{2a^2}{y}\cos\theta\right)}{\left(r^2+\frac{a^4}{y^2}-2r\frac{a^2}{y}\cos\theta\right)^{3/2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{q(a-y\cos\theta)}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{y}q\left(a-\frac{a^2}{y}\cos\theta\right)}{\left(a^2+\frac{a^4}{y^2}-\frac{2a^3}{y}\cos\theta\right)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{q(a-y\cos\theta)}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}} - \frac{qay(ay-a^2\cos\theta)}{\underbrace{(a^4+a^2y^2-2a^3y\cos\theta)^{3/2}}_{a^2(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{q(a-y\cos\theta)}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}} - \frac{q\,y/a\,(y-a\cos\theta)}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{qa-qy\cos\theta-q\frac{y^2}{a}+qy\cos\theta}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}}\right] = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{q(a-y^2/a)}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}}\right)$$



چگالی بار به θ بستگی دارد پس بار بطور یکنواخت روی سطح توزیع نمی‌شود.

حالت دوم: q' ای که در مرکز قرار می‌دهیم تا پتانسیل V ثابت را در سطح کره

موجب شود روی سطح بار القا می‌کند پس چگالی سطحی داریم

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{q(a-\frac{y^2}{a})}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}} + \frac{Va}{4\pi a^2}\right) \qquad \frac{q}{4\pi r^2}$$

حالت سوم: $Q-q'$ را در مرکز قرار دادیم تا بار q' القا شده Q ثابت کره را موجب شود که این

$Q-q'$ بار در سطح کره القا می‌کند لذا چگالی سطحی بار ما در این حالت:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{q(a-\frac{y^2}{a})}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}} + \frac{Q+\frac{a}{y}q}{4\pi a^2}\right)$$

بار روی کره

حالت اول: از σ روی سطح کره انتگرال بگیریم q سطح کره بدست می آید

$$Q = \int \sigma\, ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{q}{a}(a^2-y^2)}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\, a\, \frac{2q}{a}(a^2-y^2)\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(a^2+y^2-2ay\cos\theta)^{3/2}} = \frac{qa(a^2-y^2)}{2}\,\frac{1}{2ay}\int \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$= \frac{q(a^2-y^2)}{4y}\,\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{q(y^2-a^2)}{2y}\,\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2-2ay\cos\theta}}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$\frac{q(y^2-a^2)}{2y}\left(\frac{1}{a+y}-\frac{1}{y-a}\right) = \frac{-\cancel{2}aq}{\cancel{2}y} = \frac{-a}{y}\, q = q'$$

این را قبلاً هم داشتیم که وقتی کره به زمین وصل است و بار q جلوی آن است بار القایی که بر روی کره ایجاد می شود q' است.

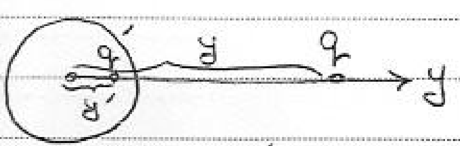
حالت دوم:

$$Q = q' + Va$$

حالت سوم:

$$Q = q' + (Q - q') = Q$$

نیرویی که بار نقطه ای q به کره وارد می کند



حالت اول:

$$\vec{F}_{q\ \text{به صفحه}} = \frac{qq'}{(y-y')}\,\hat{y}$$

حالت دوم:

$$\vec{F} = \frac{qq'}{(y-y')^2}\,\hat{y} + \frac{qq''}{y^2}\,\hat{y}$$

حالت سوم:

$$\vec{F} = \frac{qq'}{(y-y')^2}\,\hat{y} + \frac{q(Q-q')}{y^2}\,\hat{y}$$